1 Exercice n^o 1 : numération mésopotamienne

Les Babyloniens de l'Antiquité utilisaient une base soixante pour compter. Dans un tel système, il est nécessaire d'utiliser soixante chiffres, c'est-à-dire soixante symboles *distincts*, ce qui n'est clairement pas pratique. Pour contourner cette difficulté, les Babyloniens employaient également un système en base dix pour noter les chiffres.

Dans cet exercice nous supposerons que les chiffres de la base dix sont nos chiffres usuels, à savoir $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Les soixante chiffres de la base soixante, écrits dans la base dix (ouf !), sont donc notés comme nos nombres usuels de 0 à 59 (écrits en base dix). Par exemple, le chiffre représentant le nombre vingt-cinq est simplement noté 25. Afin de permettre la lisibilité, on sépare les chiffres de la base soixante par un espace. Ainsi, on peut écrire $(1\ 33\ 51\ 45)_{60}$ qui représente un certain nombre dans la base soixante.

1. Calculer la valeur en base dix du nombre $(20\ 8\ 11)_{60}$;
2. La notation ambiguë " 66 " représente-t'elle un chiffre en base soixante ou un nombre en base soixante ? Si c'est un nombre, quelle est sa valeur en base dix ?
3. Imaginer un système similaire dans lequel les nombres de la base soixante seraient notés dans un système *quinaire*, c'est-à-dire à l'aide des cinq chiffres $0, 1, 2, 3, 4$. L'écriture $(22\ 0\ 35)_{60}$ est-elle valide dans cette représentation ? Quelle est la valeur décimale de $(1\ 40\ 2)_{60}$?

SOLUTIONS

1. Il suffit de calculer $20 \times 60^2 + 8 \times 60^1 + 11 \times 60^0 = (72\ 491)_{10}$;
2. "66" ne peut pas être un chiffre de la base soixante, car on a exactement 60 chiffres dans cette base (qui sont écrits comme nos nombres - en base dix - de zéro à cinquante-neuf). Cela ne peut représenter que le nombre $(6\ 6)_{60} = 6 \times 60 + 6 = (366)_{10}$;
3. L'écriture $(22\ 0\ 35)_{60}$ où les chiffres de la base soixante sont eux-même notés dans la base cinq (en utilisant les chiffres $0, 1, 2, 3, 4$) n'est pas valide var 5 n'est pas un chiffre de la base cinq.
   Pour calculer $(1\ 40\ 2)_{60}$ il nous faut d'abord connaître la valeur de $(40)_5$, dans la base dix. On a $(40)_5 = 4 \times 5 + 0 = (20)_{10}$. Il en résulte que $(1\ 40\ 2)_{60} = ((1)_5\ (40)_5\ (2)_5)_{60} = ((1)_{10}\ (20)_{10}\ (2)_{10})_{60} = 1 \times 60^2 + 20 \times 60 + 2 = (4\ 802)_{10}$

2 Exercice n^o 2 : Passage d'une base quelconque à la base dix

Donner la valeur en base dix des nombres suivants. (**SOLUTIONS**

1. $(100110)_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = (38)_{10}$;
2. $(111011)_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2 + 1 \times 2^0 = (59)_{10}$;
3. $(111011)_3 = 1 \times 3^5 + 1 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 1 \times 3 + 1 \times 3^0 = (355)_{10}$;
4. $(23AC)_{16} = 2 \times 16^3 + 3 \times 16^2 + 10 \times 16 + 12 = (9\ 132)_{10}$;

5. $(2A5B)_{12} = 2 \times 12^3 + 10 \times 12^2 + 5 \times 12 + 11 = (4\ 967)_{10}$;
6. $(444)_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5 + 4 = (124)_{10}$;
7. $(1807)_9 = 1 \times 9^3 + 8 \times 9^2 + 0 \times 9 + 7 = (1\ 384)_{10}$;
8. $(A7)_{10} =$? IL Y'A UN PIÈGE : CE N'EST PAS UNE ÉCRITURE DANS LA BASE 10 ;
9. $(1)_7 = (1)_{10}$;
10. $(100000)_2 = 2^5 = 32$.

3 Exercice n^o 3 : Passage de la base dix à une base quelconque

Donner la valeur des nombres écrits en base dix suivants dans la base spécifiée. **Solution** IL FAUT CALCULER DES DIVISIONS ENTIÈRES SUCCESSIVES.

1. 45 en base deux ; $(101101)_2$
2. 1022 en base deux $(1111111110)_2$;
3. 256 en base deux $(10000000)_2$;
4. 413 en base deux $(110011101)_2$;
5. 88 en base deux (1011000) ;
6. 256 en base quatre $(10000)_4$;
7. 256 en base seize $(100)_{16}$;
8. 1022 en base quatre $(33332)_4$;
9. 1022 en base seize $(3FE)_{16}$;
10. 413 en base seize $(19D)_{16}$.

4 Exercice n^o 4 : Passage d'une base quelconque à une autre base quelconque

Donner la valeur des nombres écrits une base spécifiée suivants dans la base cible. **SOLUTIONS**

1. $(1001001)_2$ en base trois ; $(1001001)_2 = (73)_{10} = (2201)_3$
2. $(10010010)_2$ en base seize ; $(10010010)_2 = (1001\ 0010)_2 = (92)_{16}$
3. $(1011100111)_2$ en base seize ;$(1011100111)_2 = (0010\ 1110\ 0111) = (2E7)_{16}$
4. $(AB6C5)_{16}$ en base deux ; $(AB6C5)_{16} = (1010\ 1011\ 0110\ 1100\ 0101)_2$
5. $(312)_5$ en base trois. $(312)_5 = (82)_{10} = (10001)_3$.

5 Exercice n^o 5 : Notation positionnelle et non positionnelle

SOLUTIONS

1. Quelle est la différence essentielle entre le système de numération des Romains et le notre ? (Excepté l'absence d'un zéro chez les Romains.) **La valeur d'un chiffre romain dans l'écriture d'un nombre ne dépend pas de sa position dans l'écriture. Le symbole V, par exemple, vaut toujours 5 quelle que soit sa position. Ce n'est pas le cas de notre système de numération puisque la valeur d'un chiffre dans l'écriture d'un nombre dépend de la valeur du symbole multiplié par une puissance de 10, cette puissance correspondant à la position du chiffre. On parle de notation positionnelle (la notre) et notation additive (pour les Romains).**
2. Supposons maintenant que l'on emploie la numérotation des Romains pour noter les soixantes chiffres de la base soixante. Dans ce cas, quelle est la valeur décimale de $(XI\ IV)_{60}$? **Solution :** $XI = (11)_{10}$, $IV = (4)_{10}$. **On a donc** $(XI\ IV)_{60} = (11\ 4)_{60} = 11 \times 60 + 4 = (664)_{10}$.
3. Sous les mêmes hypothèses que la question précédente, écrire le nombre $(782)_{10}$ dans la base soixante (en utilisant les chiffres romains). **Solution : On commence par traduire** $(782)_{10}$ **en base soixante par division entières. On obtient** $(13\ 2)_{60}$, **puis on écrit les chiffres dans le système romain, on a donc** $(XIII\ II)_{60}$.