Six façettes de la sphère d'homologie de Poincaré

Stage effectué sous la direction de Christine Lescop

Thierry Monteil

Juin-Juillet 2000

Table des matières

La sphère d'homologie de Poincaré est le premier exemple, construit par Poincaré en 1904 dans le Cinquième complément à l'analysis situs, de variété compacte de dimension trois qui a la même homologie que $\mathbb{S}^3$ mais qui ne lui est pas homéomorphe.
Le but du stage est de décrire diverses façons de représenter la sphère de Poincaré et de montrer que ces présentations sont homéomorphes.

1 $SO(3)/\mathcal{A}_5$

Soit G le sous-groupe de $SO(3)$ qui laisse stable un dodécaèdre régulier centré en 0.
Le groupe des isométries positives du dodécaèdre est isomorphe à $\mathcal{A}_5$ (on peut le voir en coloriant les sommets du dodécaèdre en 5 couleurs de sorte qu'une isométrie du dodécaèdre induise une permutation de signature $+1$ des 5 groupes de sommets (voir figure 1.1)).
Il est fini donc le quotient $P = SO(3)/\mathcal{A}_5$ est une variété compacte et connexe de dimension 3.
C'est notre première définition de la sphère de Poincaré P.
On a déjà $H_0(P) = \mathbb{Z}$.

2 $\mathbb{S}^3/I$

On considère $\mathbb{S}^3$ comme le groupe multiplicatif des quaternions de module 1.
$\mathbb{S}^3$ agit sur $\mathbb{H}$ par conjugaison : $\begin{pmatrix} \mathbb{S}^3 \times \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ (s,h) & \longmapsto & shs^{-1} = sh\overline{s} \end{pmatrix}$.
Tout élément de $\mathbb{S}^3$ est ainsi vu comme une isométrie de $\mathbb{H}$ qui stabilise $\mathbb{R}$ donc $Vect(i,j,k)$.
Ceci définit un morphisme continu p de $\mathbb{S}^3$ dans $O(3)$ et même dans $SO(3)$ car $\mathbb{S}^3$ est connexe.
Tout élément de $\mathbb{S}^3$ s'écrit $s = \cos(\theta) + \sin(\theta)(xi + yj + zk)$ où $\theta \in [0,\pi]$ et $(x,y,z) \in \mathbb{S}^2$ (Cette écriture est unique lorsque $s \neq \pm 1$). On a $\|s-1\| = \sqrt{2(1-\cos(\theta))}$.
L'image d'un tel s dans $SO(3)$ est la rotation d'axe $\mathbb{R}_+(x,y,z)$ et d'angle 2θ.
p est alors surjectif et son noyau est $\{-1,+1\}$.

Soit I la préimage de $\mathcal{A}_5$ par ce morphisme (I est de cardinal 120).
Ainsi, *P est homéomorphe à* $\mathbb{S}^3/I$ et comme $\mathbb{S}^3$ est simplement connexe, c'est le revêtement universel de P et $\pi_1(P) = I$.

On a la suite exacte $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to I \to \mathcal{A}_5 \to 0$ mais on n'a pas de section de $\mathcal{A}_5$ dans I (regarder une rotation d'angle π et d'axe passant par le milieu d'une arête du dodécaèdre qui n'a pas d'antécédent d'ordre 2 dans I).
Donc, comme $\mathcal{A}_5$ est simple, le seul sous-groupe distingué de I est $\{-1,+1\}$.
Le sous-groupe de I engendré par les commutateurs est distingué et il contient un élément d'ordre supérieur à 3 (le commutateur d'une préimage de (1,2,3,4,5) et de (1,2,3) est une préimage de (1,4,2)), donc c'est I et l'abélianisé de $\pi_1(P)$ est $H_1(P) = \{0\}$.
Puis, $I = \pi_1(P)$ n'a pas de sous-groupe d'indice 2 donc P est orientable (on peut aussi dire que la multiplication par un élément de $\mathbb{S}^3$ préserve l'orientation) et, comme P est compacte et connexe, on en déduit que $H_3(P) = \mathbb{Z}$. Enfin, par dualité de Poincaré et grâce au théorème des coefficients universels, $H_2(P) = \{0\}$.
Ainsi, P a la même homologie que $\mathbb{S}^3$ mais ne lui est pas homéomorphe (pas simplement connexe).

3 Recollement du dodécaèdre

Soit D le domaine fondamental $\{s \in \mathbb{S}^3/(\forall g \in I)(\|s-1\| \leq \|gs-1\|)\}$.
Pour $s \in D$ et $n \geq 1$, on pose $n(s) = card(\{g \in I/\|s-1\| = \|gs-1\|\})$ et $D_n = \{s \in D/n(s) = n\}$.
On a, $D = \bigcup\limits_{1 \leq n \leq 4} D_n$, $D_1 = \overset{\circ}{D}$ et il existe un homéomorphisme de D dans le dodécaèdre plein qui envoie D_2 sur les faces, D_3 sur les arêtes et D_4 sur les sommets.
En fait, les seuls $g \in I$ qui peuvent vérifier, pour un certain $s \in D$, $\|s-1\| = \|gs-1\|$ sont les 12 éléments pour lesquels $\theta = \pi/5$ et à chacun de ces éléments correspond une face du dodécaèdre .
Puis, on a $\mathbb{S}^3 = \bigcup\limits_{g \in I} gD$ donc tout élément de $\mathbb{S}^3/I$ a un représentant dans D donc il suffit d'identifier chaque $s \in D$ avec les gs qui sont dans D $(g \in I)$. Les éléments de D_1 ne sont liés qu'à eux mêmes.

Les faces (composantes connexes de D_2) sont identifiées deux à deux et le $g \in I$ convenable est de la forme $g = \cos(\pi/5) + \sin(\pi/5)v$.
Pour savoir où est envoyée une face par translation avec cet élément, on regarde où est envoyé son centre $s = \cos(\theta) - \sin(\theta)v$ (s, 1 et g sont "alignés").
s est envoyé sur $s^{-1} = \overline{s}$ qui est le centre de la face opposée (et $\theta = \pi/10$).
Il suffit donc de connaitre l'angle de rotation d'identification des faces. Prenons le cas particulier où $g = \cos(\pi/5) + \sin(\pi/5)i$ et $s = \cos(\theta) + \sin(\theta)(\lambda i + \mu j)$ est un point de la face différent du centre. La composante en j du produit vaut $\cos(\pi/5)\sin(\theta)\mu$ et celle en k vaut $\sin(\pi/5)\sin(\theta)\mu$ donc la face a tourné de $+\pi/5$.

Pour les éléments de D_3 et D_4, on remarque que le cardinal de la classe d'équivalence de $s \in D$ est $n(s)$. Une arête se trouve entre deux faces donc, l'identification précédente (lorsque on considère les faces fermées) les regroupe déjà trois par trois. Un sommet se trouve entre trois faces donc, l'identification précédente les regroupe quatre par quatre.
Ainsi, prolonger l'identification faite pour les faces par adhérence suffit à faire toutes les identifications pour les arêtes et les sommets.

Au final, *P est homéomorphe à un dodécaèdre pour lequel on a identifié les faces opposées en "poussant" une face sur l'autre après lui avoir fait subir une rotation de* $+\pi/5$ (l'axe est la normale rentrante au dodécaèdre).
C'est un complexe cellulaire qui a 5 sommets, 10 arêtes, 6 faces et une boule de dimension 3.

Pour la culture, toutes les variétés compactes et connexes de dimension 3 peuvent être obtenues en identifiant les faces d'un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^3$. De plus, un espace obtenu par ce procédé est une variété si et seulement si sa caractéristique d'Euler vaut 0 (voir [ST]).

4 Revêtement ramifié

Un *noeud* K dans une variété M est un plongement C^1 de $\mathbb{S}^1$ dans M vu à isotopie ambiante près. Soit M une variété compacte et connexe de dimension trois, K un noeud dans $\mathbb{S}^3$ et $p \in \{2, 3, 5\}$. Supposons qu'il existe un homéomorphisme h de M périodique de période p tel que l'espace quotient M/h soit homéomorphe à $\mathbb{S}^3$ et que la projection de l'ensemble des points fixes de h sur $\mathbb{S}^3$ soit K : on dit que M est un *revêtement ramifié* d'ordre p de $\mathbb{S}^3$ le long du noeud K.
Un tel M est alors unique à homéomorphisme près, on le note $R_p(K)$ (admis).

Montrons que P est homéomorphe à $R_5(T_{2,3})$ où $T_{2,3}$ désigne le noeud de trêfle (voir figure 4.1). Ce noeud peut s'inscrire dans un tore, et sa classe d'homologie est alors 3.méridien+2.longitude.
Soit h la rotation d'angle $2\pi/5$ et d'axe passant par le milieu d'une face du dodécaèdre (à bords). Cet homéomorphisme passe au quotient en un homéomorphisme encore noté h de P (h commute avec les 12 applications qui poussent une face du dodécaèdre sur sa face opposée). Puis, on regarde un domaine fondamental D pour cette action (voir figure 4.2, c'est l'union des segments joignant les points des deux faces coloriées à leur projeté orthogonal sur l'axe de rotation) et, comme au paragraphe 3, on identifie faces et arêtes en regardant ce que devient l'axe (le cercle si on regarde dans P) des points fixes.
Tous les sommets du dodécaèdre sont identifiés, il y a deux classes d'arêtes notées α et β ainsi que deux classes de faces (les deux qui sont traversées par l'axe et les autres).
On voit D comme réunion de D_1 qui est un voisinage tubulaire fermé des arêtes dont la classe est β et D_2 qui est l'adhérence du complémentaire de D_1 dans D et on fait glisser le cercle des points fixes sur la frontière de D_1 (le revêtement ramifié ne dépend que de la classe d'isotopie du noeud) (voir figure 4.3). Chaque D_i est stable par les identifications, on peut les étudier séparement et voir comment ils se recollent.

Les deux composantes connexes de D_1 se recollent par l'action de h (voir figure 4.4).
Les deux faces de derrière seront recollées à D_2.
Les faces du dessus et du dessous sont identifiées deux à deux.
Puis on divise chaque face de devant en 3 et on les identifie deux à deux par l'application qui pousse la face sur sa face opposée puis par h^3 (voir figure 4.5).
On obtient un tore plein dont β est un générateur du π_1 (ou du H_1) (une longitude) et où le cercle des points fixes fait 3.longitude dans ce tore (voir figure 4.6).
On fait de même pour D_2 sauf que la face de devant est divisée en deux (voir figure 4.7) et on obtient un tore plein où le cercle des points fixes fait dans ce tore 2.longitude.
Reste à voir comment se recollent ces deux tores pleins et à quoi ressemble le cercle des points fixes dans cet espace.

Un méridien dans un tore plein est un noeud sur le bord de ce tore qui est homologue à 0 dans le tore mais qui ne l'est pas lorsqu'on le considère comme un lacet du bord du tore (ainsi, un méridien et une longitude qui se trouve sur le bord du tore plein engendrent le H_1 du tore (le bord du tore plein). Il y a deux classes de méridiens à isotopie du bord du tore près.
En fait, connaître totalement l'homéomorphisme qui recolle les bords des deux tores pleins D_1 et D_2 n'est pas nécessaire pour identifier l'espace final.
Ici, un méridien de D_1 se recolle avec une longitude de D_2 et cette seule information suffit à montrer que l'espace final est $\mathbb{S}^3$.

En effet, on a le résultat d'unicité suivant :
Soient M_1 et M_2 deux variétés de dimension 3 telles qu'il existe dans M_i un tore plein T_i (l'image d'un plongement $p_i : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \to M_i$) et un homéomorphisme $\psi : M_1 \setminus \overset{\circ}{T_1} \to M_2 \setminus \overset{\circ}{T_2}$ tel que $\psi(p_1(\mathbb{S}^1 \times \{1\})) = p_2(\mathbb{S}^1 \times \{1\})$, alors M_1 et M_2 sont homéomorphes.
En effet, on prolonge d'abord ψ en un homéomorphisme de $(M_1 \setminus \overset{\circ}{T_1}) \cup p_1(\mathbb{D}^2 \times \{1\})$ dans $(M_2 \setminus \overset{\circ}{T_2}) \cup p_2(\mathbb{D}^2 \times \{1\})$, puis on épaissit en un homéomorphisme de $(M_1 \setminus \overset{\circ}{T_1}) \cup p_1(\mathbb{D}^2 \times e^{[-i,i]})$ dans un fermé de M_2 dont le complémentaire est homéomorphe à $\mathbb{B}^3$ et le théorème d'Alexander permet de conclure.

Ainsi, P/h est homéomorphe à $\mathbb{S}^3$ et l'image du cercle des points fixes de h dans $\mathbb{S}^3$ fait 3 longitudes dans le premier tore et 2 dans le second : on reconnait le noeud de trêfle $T_{2,3}$.
Bilan, *P est homéomorphe à $R_5(T_{2,3})$.*

5 Pourtour (ou *link*) d'une singularité

Soient $\varphi = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 \simeq \mathbb{R}^6 & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3 \\ (z_1, z_2, z_3) & \longmapsto & (z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 \ , \ |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) \end{array} \right)$ et $M = \varphi^{-1}(\{(0,1)\})$.
$d\varphi$ est surjective en tout point de M qui est une variété compacte connexe de dimension 3.
Soit $h = \left(\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M \\ (z_1, z_2, z_3) & \longmapsto & (z_1, z_2, e^{2i\pi/5} z_3) \end{array} \right)$ est un homéomorphisme de M périodique de période 5.
Soit $\psi = \left(\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2, z_3) & \longmapsto & (z_1, z_2)/\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} \end{array} \right)$ est bien définie et continue.

Puis, si $(Z_1, Z_2) \in \mathbb{S}^3$, soit $Q(\lambda) = (1 - 2\lambda^2)^5 - |\lambda^2 Z_1^2 + \lambda^3 Z_2^3|^2$, alors $Q(0) = 1$ et $Q(1/\sqrt{2}) \leq 0$.
Soit donc λ_0 une racine de Q dans $]0, 1/\sqrt{2}]$ et soit $\theta = (arg(\lambda_0^2 Z_1^2 + \lambda_0^3 Z_2^3) + \pi)/5$.
On pose $z_1 = \lambda_0 Z_1$, $z_2 = \lambda_0 Z_2$ et $z_3 = \sqrt{1 - 2\lambda_0^2}\, e^{i\theta}$.
On constate que $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1$, que $z_1^2 + z_2^3 = -z_3^5$ (regarder module et argument) et que $\psi(z_1, z_2, z_3) = (Z_1, Z_2)$. Ainsi, ψ est surjective.

ψ passe au quotient en une application continue et bijective de M/h compact sur $\mathbb{S}^3$ séparé donc M/h est homéomorphe à $\mathbb{S}^3$.
Le cercle des points fixes de h est $\{(z_1, z_2, z_3) \in M / z_3 = 0\} = \{(z_1, z_2, z_3) \in M / z_1^2 + z_2^3 = 0\}$.
Cet ensemble peut être paramétré par $\left(\begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & M \\ t & \longmapsto & (C^3 e^{3it}, -C^2 e^{2it}, 0) \end{array} \right)$ où C est l'unique réel positif tel que $C^6 + C^4 = 1$. L'image de cet ensemble par ψ s'inscrit dans un tore et est paramétré par $\left(\begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{S}^3 \\ t & \longmapsto & (C^3 e^{3it}, -C^2 e^{2it}) \end{array} \right)$: on reconnait une paramétrisation du noeud de trêfle.

Ainsi M est un revêtement ramifié d'ordre 5 de $\mathbb{S}^3$ le long du noeud $T_{2,3}$.
Il est donc homéomorphe à P.
En échangeant le rôle des variables z_1, z_2 et z_3, on voit que P est homéomorphe à $R_3(T_{2,5})$ et à $R_2(T_{3,5})$ (voir figure 5.1).

6 Chirurgies

Une chirurgie sur un entrelacs pondéré $((K_1, r_1), \ldots, (K_n, r_n))$ (les r_i sont des rationnels et les K_i sont des noeuds disjoints de $\mathbb{S}^3$), notée $\chi((K_1, r_1), \ldots, (K_n, r_n))$, est définie comme suit :
On choisit, pour chaque K_i, un voisinage tubulaire (homéomorphe à un tore plein) T_i de sorte qu'ils soient disjoints deux à deux.
Puis, chaque noeud hérite d'une orientation (celle du plongement de $\mathbb{S}^1$) et on peut définir laquelle des deux classes m_i de méridiens sur T_i est privilégiée (on choisit la convention dite "standard").
Parmi les longitudes de T_i, on en choisit une sur le bord dite *longitude privilégiée* notée l_i : K_i est un lacet homologue à 0, donc il borde une surface dans $\mathbb{S}^3$ que l'on peut supposer transverse à ∂T_i. L'intersection des deux est une longitude le long de T_i et on l'oriente le long de K_i (voir figure 6.1). Cette longitude l_i est alors unique à isotopie près.
Puis on pose $\chi((K_1, r_1), \ldots, (K_n, r_n)) = \left(\left(\mathbb{S}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overset{\circ}{T_i}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \{i\}\right)\right) / \phi$ où ϕ est un homéomorphisme de $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \{i\}$ dans $\bigcup_{i=1}^{n} \partial T_i$ qui envoie, pour tout $i \leq n$, $\mathbb{S}^1 \times \{1\} \times \{i\}$ sur $p_i.m_i + q_i.l_i$ (avec $p_i \wedge q_i = 1$ et $r_i = p_i/q_i$).
Cette variété est bien définie en vertu du résultat d'unicité de la fin du paragraphe 4. Noter cependant que deux entrelacs $(K_1, \ldots, K_n)$ et $(K'_1, \ldots, K'_n)$ sont identifiés si et seulement si il existe une isotopie de $\mathbb{S}^3$ qui envoie K_i sur K'_i (ce qui est plus fort que de dire que K_i et K'_i sont isotopes pour tout i). On peut étendre cette définition à toute variété de dimension 3 dont le H_1 est nul (pour pouvoir choisir une longitude privilégiée).

Etudions $\chi(T, \epsilon)$ où T est le noeud trivial et $\epsilon \in \{-1, 1\}$ (par exemple, $\epsilon = 1$).
On note T_1 un voisinage tubulaire de T (voir figure 6.1), et C le cylindre $\overline{conv(\overset{\circ}{T_1}) \setminus \overset{\circ}{T_1}}$.
On a un homéomorphisme de C (appelé *twist*) qui se prolonge sur $\mathbb{S}^3 \setminus \overset{\circ}{T_1}$ (par l'identité) et qui envoie $m_1 + l_1$ sur m_1 (voir figure 6.2) (on peut l'écrire, en identifiant C à $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$, $(z, t) \overset{twist}{\longmapsto} (ze^{-2i\pi t}, t)$).
Ainsi $\chi(T, \epsilon)$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^3$ et l'homéomorphisme à pour effet de twister deux brins passant dans C (voir figure 6.3). Cet homéomorphisme de twist est appelé *mouvement de Fenn-Rourke.*

On considère l'entrelacs pondéré $EP5$ (voir figure 6.4) où tous les coefficients de chirurgie valent -1 et on note h la rotation d'axe Oz et d'angle $2\pi/5$ alors $\chi(EP5)/h$ est homéomorphe à $\chi(T, +1) \simeq \mathbb{S}^3$ (voir figure 6.5 pour l'entrelacement entre T et l'image du cercle des points fixes de h).
Après avoir mis T en position régulière et effectué un mouvement de Fenn-Rourke pour enlever la chirurgie, on constate que le cercle des points fixes n'est autre que le noeud de trèfle $T_{2,3}$ (voir figure 6.6). Ainsi $\chi(EP5)$ *est homéomorphe à* $R_5(T_{2,3})$ *donc à* P.

Enfin, on peut obtenir toute une série de chirurgies pour décrire P en effectuant une suite de mouvements de Fenn-Rourke (c'est possible tant que l'entrelacs possède un noeud trivial avec un coefficient $+1$ ou -1) (voir figure 6.7). Il faut alors tenir compte du twist qu'induit la transformation élémentaire non seulement sur les autres noeuds de l'entrelacs mais aussi sur leurs longitudes (ce qui change le coefficient de chirurgie). On constate alors que P *est homéomorphe à* $\chi(T_{2,3}, -1)$.

Pour la culture, toute variété compacte, connexe et orientée de dimension 3 peut être obtenue par chirurgie sur un entrelacs pondéré à partir de $\mathbb{S}^3$. De plus, deux telles chirugies donnent des espaces homéomorphes si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie de mouvements de Fenn-Rourke.

Références

[B] Marcel BERGER *Géométrie*, Cedic / Fernand Nathan, 1979.

[G] Marvin J. GREENBERG *Lectures on Algebraic Topology*, Mathematics Lectures notes, 1967.

[KS] R.C. KIRBY, M.G. SCHARLEMANN, *Eight faces of the Poincaré homology 3-sphere*, Geometric topology, Proc. Georgia Topology Conf. Athens, Ga, 1977, 113-146, Academic Press, New-York-London, 1979.

[L] Christine LESCOP, *Quelques présentations des variétés de dimension 3*, femmes et maths, 2000.

[R] Dale ROLFSEN *Knots and Links*, Publish or Perish, 1976.

[ST] H. SEIFERT, W. THRELFALL, *A Textbook of Topology*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1980.

Boîte à outils

Voici une liste de résultats relatifs à la topologie de dimension 3 admis.

• Toute variété topologique de dimension 3 admet une unique structure C^∞ et peut être triangulée.

• Dans une variété de dimension 3, un lacet est homologue à 0 si et seulement si il borde une surface plongée orientable.

• Dans $\mathbb{S}^3$, deux noeuds sont isotopes si et seulement si il existe un homéomorphisme entre leurs complémentaires qui préserve l'orientation.

• *Théorème d'Alexander* : Soient M_1 et M_2 deux variétés de dimension 3 telles qu'il existe dans M_i une boule B_i (l'image d'un plongement $p_i : \mathbb{D}^3 \to M_i$) et un homéomorphisme $\psi : M_1 \backslash \overset{\circ}{B}_1 \to M_2 \backslash \overset{\circ}{B}_2$, alors M_1 et M_2 sont homéomorphes.
En effet, on pose $\widetilde{\psi} = \begin{pmatrix} p_1(\mathbb{D}^3) = p_1([0,1].\mathbb{S}^2) & \longrightarrow & p_2(\mathbb{D}^3) \\ p_1(\lambda x) & \longmapsto & p_2(\lambda p_2^{-1}(\psi(p_1(x)))) \end{pmatrix}$ est bien définie, bijective, continue (même en $p_1(0)$) et coincide avec ψ sur $p_1(\mathbb{S}^2)$ donc, par recollement d'homéomorphismes sur des fermés, M_1 et M_2 sont homéomorphes.