Classification non linéaire des espaces de Banach

Stage effectué sous la direction de Gilles Lancien

Thierry Monteil

Juin-Juillet 1999

Table des matières

Soient X et Y deux Banachs.
On note X $\sim_I$ Y s'il existe un isomorphisme (bi)continu entre X et Y.
On note X $\sim_L$ Y s'il existe une bijection bilipschitzienne entre X et Y.
On note X $\sim_U$ Y s'il existe une bijection bi-uniformément continue entre X et Y.
On note X $\sim_H$ Y s'il existe un homéomorphisme entre X et Y.

1 Classification par homéomorphisme

On se demande dans cette partie, à quelles conditions deux espaces de Banachs X et Y sont homéomorphes : il s'agit de classification topologique des espaces de Banach.

Si X est de dimension finie $p \geq 1$ et si Y est homéomorphe à X, alors Y est de dimension finie $q \geq 1$ car il est localement compact. Si f est un homéomorphisme de X dans Y, on a $X\backslash\{0\} \sim_H Y\backslash\{f(0)\} \sim_H Y\backslash\{0\}$. Or $X\backslash\{0\}$ (resp. $Y\backslash\{0\}$) a le même type d'homotopie, et en particulier les mêmes groupes d'homologie singulière, que $\mathbb{S}^{p-1}$ (resp. $\mathbb{S}^{q-1}$) donc p=q. Réciproquement, si X et Y sont des Banachs de même dimension finie, ils sont homéomorphes (car isomorphes).

On s'intéresse désormais au cas où X est de dimension infinie. L'objectif de cette partie est de montrer que deux Banachs séparables de dimension infinie sont homéomorphes. Si X est un tel Banach, on construit un homéomorphisme entre X et $l_2(\mathbb{N}^*)$.

1.1 Bartle-Graves

Proposition 1.1 (Bartle-Graves modifié) *Soient X et Y deux Banach et T une surjection linéaire continue de X dans Y. Alors :*

1. *Il existe une application f continue de Y dans X, telle que $T \circ f = Id_Y$.*
2. *L'application $\varphi \overset{def}{=} \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & \ker(T) \times Y \\ x & \longmapsto & (x - f(T(x)) + f(0), T(x)) \end{pmatrix}$ est un homéomorphisme.*
3. *Si X_0 est un sous espace vectoriel fermé de X, et si T est la projection canonique de X sur $Y = X/X_0$, si d>d'>0, on peut imposer à f de vérifier $f(\overline{B}_{X/X_0}(0,d')) \subset \overline{B}_X(0,d)$.*

Preuve : On montre simultanément 1 et 3.

Pour 1, d'après le théorème de l'application ouverte, il existe $d' > 0$ tel que $B_Y(0,d') \subset T(B_X(0,1))$ et on pose d=d'+2.

Soit $d'' \overset{\text{def}}{=} (d'+d)/2$. On a donc $\overline{B}_Y(0,d') \subset T(B_X(0,d''))$.
Soit, pour $k \geq 1$, $\epsilon_k \overset{\text{def}}{=} 2^{-k}\ln(d/d'')$. C'est une suite strictement positive telle que $\prod_{k=1}^{+\infty}(1+\epsilon_k) \leq d/d''$.
Soit $(\varphi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité de $\overline{B}_Y(0,d')$ telle que le diamètre du support de φ_i ($i \in I$) soit inférieur à $(d'/2)\epsilon_1$. On peut de plus supposer qu'aucune φ_i n'est nulle de sorte que pour tout $i \in I$, il existe $x_i \in B_X(0,d'')$ tel que $\varphi_i(T(x_i)) \neq 0$.
Si $y \in \overline{B}_Y(0,d')$, on pose $f_1(y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i\in I} \varphi_i(y)x_i \in B_X(0,d'')$ ($B_X(0,d'')$ est convexe).

Puis on construit par récurrence sur n une suite (f_n) de fonctions de $\overline{B}_Y(0,d')$ dans X telle que pour tout $n \geq 1$ et tout $y \in \overline{B}_Y(0,d')$:

- $\|y - T(f_n(y))\| \leq (d'/2) \prod_{k=1}^{n} \epsilon_k$
- $\|f_n(y)\| \leq d'' \prod_{k=1}^{n} (1+\epsilon_k)$

Ces deux conditions sont vérifiées par f_1. Supposons les f_k construites jusqu'à n.
On pose, pour y dans $\overline{B}_Y(0,d')$, $f_{n+1}(y) \stackrel{\text{def}}{=} f_n(y) + \epsilon_{n+1} f_n((y - T(f_n(y)))/\epsilon_{n+1})$ qui est bien définie car $(y - T(f_n(y)))/\epsilon_{n+1} \in \overline{B}_Y(0,d')$.
On a $\|f_{n+1}(y)\| \leq d'' \prod_{k=1}^{n}(1+\epsilon_k) + \epsilon_{n+1} d'' \prod_{k=1}^{n}(1+\epsilon_k) = d'' \prod_{k=1}^{n+1} \epsilon_k$ et

$$\|y - T(f_{n+1}(y))\| = \epsilon_{n+1}\|((y - T(f_n(y)))/\epsilon_{n+1}) + T(f_n(y - T(f_n(y))/\epsilon_{n+1}))\| \leq (d'/2) \prod_{k=1}^{n+1} \epsilon_k.$$

Puis (f_n) est une suite de Cauchy dans l'ensemble des fonctions continues et bornées de $\overline{B}_Y(0,d')$ dans X muni de la norme de la convergence uniforme qui est complet donc converge vers une fonction f continue et bornée de $\overline{B}_Y(0,d')$ dans X.
On vérifie que pour tout y dans $\overline{B}_Y(0,d')$, $\|f(y)\| \leq d'' \prod_{k=1}^{+\infty}(1+\epsilon_k) \leq d$ et $T(f(y)) = y$.
On prolonge f sur Y tout entier en posant, si $\|y\| > d'$, $f(y) \stackrel{\text{def}}{=} \|y\| f(d'y/\|y\|)/d'$.
Clairement, f est continue et vérifie $T(f(y)) = y$ pour tout y dans Y.

En ce qui concerne le 2, on vérifie que φ est bien définue et continue et que $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \ker(T) \times Y & \longrightarrow & X \\ (e,y)) & \longmapsto & e + f(y) - f(0) \end{pmatrix}$ est continue et vérifie $\varphi \circ \psi = Id_{\ker(T)\times Y}$ et $\psi \circ \varphi = Id_X$.

1.2 Bases de Schauder

Soit (X,$\| \ \|$) un Banach. On dit que la suite (x_n) à valeurs dans X est une base de Schauder de X si $(\forall x \in X)(\exists! a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R}))(x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k)$.

Proposition 1.2 *Si (X,$\| \ \|$) est de dimension infinie, il existe une suite (x_n), base de Schauder d'un sous espace fermé F de X.*

Preuve : Soit (ϵ_k) une suite strictement positive telle que $\prod_{k=1}^{+\infty}(1+\epsilon_k) \leq 2$ (prendre $\epsilon_k = 2^{-k}\ln(2)$).

On montre par récurrence qu'il existe une suite (e_k) dans X de norme 1 telle que
$(\forall p \geq 1)(\forall (c_k)_{k=1}^{p+1} \in \mathbb{R}^{p+1})(\|\sum_{k=1}^{p} c_k e_k\| \leq (1+\epsilon_p)\|\sum_{k=1}^{p+1} c_k e_k\|)$.
On choisit e_1 de norme 1 quelconque dans X.
On suppose (e_k) construite jusqu'à r et vérifiant la propriété pour $p \leq r-1$.
$W \stackrel{\text{def}}{=} S(0,1) \cap Vect(e_1, \dots, e_r)$ est compact, donc il existe $(w_i)_{i=1}^m$ dans W^m tel que $W \subset \bigcup_{i=1}^m \overline{B}(w_i, \epsilon_r/2)$.
Si $i \leq m$, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $x_i^* \in X'$ tel que $x_i^*(w_i) = 1$ et $\|x_i^*\| = 1$ (prendre $p(x) = \|x\|$). $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto & (x_1^*(x), \dots, x_m^*(x)) \end{pmatrix}$ est linéaire et de noyau non nul car X est de dimension infinie. On a donc $x \neq 0$ dans $\ker(\varphi)$. On pose alors $e_{r+1} = x/\|x\|$. Il suffit, pour achever la récurrence de vérifier, en posant $y = \sum_{k=1}^{r} c_k e_k$, que $\|y\| \leq (1+\epsilon_r)\|y + c_{r+1}e_{r+1}\|$.
C'est évident si y=0. Sinon, il existe i dans {1,...,m} tel que $y/\|y\| \in \overline{B}(w_i, \epsilon_r/2)$. On a

$$\begin{aligned}
\|y + c_{r+1}e_{r+1}\| &= \|y\|\|y/\|y\| + (c_{r+1}/\|y\|)e_{r+1}\| \\
&\geq \|y\|(\|w_i + (c_{r+1}/\|y\|)e_{r+1}\| - \|w_i - y/\|y\|\|) \\
&\geq \|y\|(|x_i^*(w_i + (c_{r+1}/\|y\|)e_{r+1})| - \|w_i - y/\|y\|\|) \\
&\geq (1 - \epsilon_r/2)\|y\| \geq 1/(1+\epsilon_r)\|y\|.
\end{aligned}$$

Ainsi, si $c_1, \dots, c_{p+q}$ sont dans $\mathbb{R}$, on a $\|\sum_{k=1}^{p} c_k e_k\| \leq \prod_{l=p}^{p+q-1}(1+\epsilon_j)\|\sum_{k=1}^{p+q} c_k e_k\| \leq 2\|\sum_{k=1}^{p+q} c_k e_k\|$.
On pose alors $E = Vect\{e_k/k \geq 1\}$ et $F = \overline{E}$. Il résulte de l'inégalité précédente que (e_k) est libre de sorte que tout x dans E s'écrit de façon unique $x = \sum_{k=1}^{k(x)} c_k e_k$ et on note $f_k(x) = c_k$ et $f_k(x) = 0$ si k>k(x). Clairement, $f_k \in E'$ (de norme inférieure à 4), donc f_k se prolonge de façon unique en un élément de F'.
Si $x \in F$, on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)e_k$ et on vérifie que $\|S_n\| \leq 2$ (c'est évident sur E et on raisonne par densité).
Soit $\epsilon > 0$ et x dans F. On a y dans E tel que $\|x - y\| \leq \epsilon/3$ et si $n \geq k(y)+1$, on a $\|S_n(x) - x\| \leq \|S_n(y) - S_n(x)\| + \|S_n(y) - y\| + \|y - x\| \leq 2\epsilon/3 + 0 + \epsilon/3 = \epsilon$.

Donc $x = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$, i.e. $x = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)e_k$ $(x \in F)$.

Pour l'unicité, soit $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \in F$. Si $n \geq 1$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k f_n(e_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \delta_k^n = c_n$.

Si (e_k) est une base de Schauder du Banach (X,$|\ |$), on note, pour $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k$ dans X, k$\geq$1 et n$\geq$1, $f_k(x) = a_k$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$. Il résulte du théorème d'isomorphisme de Banach que la norme définie sur X par $|||x||| = Sup\{|S_n(x)|/n \geq 1\}$ est équivalente à $|\ |$. Ainsi, les S_k et les f_k sont des applications linéaires uniformément bornées en k.

Proposition 1.3 (renormalisation) *Soit (X,$|\ |$) un Banach possédant une base de Schauder (e_k). Alors, il existe une norme $\|\ \|$ sur X, équivalente à $|\ |$, et telle que :*

1. *Si $|c_1| > |c_2|$ et $c_1c_2 > 0$ dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\|\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + c_1 e_n\| > \|\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + c_2 e_n\|$.*
2. *Si (x_n) est une suite dans X telle que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$ et si $(\forall k \geq 1)(\lim_{n\to\infty} f_k(x_n) = f_k(x_0))$, alors $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.*
3. *$\|\ \|$ est localement uniformément convexe i.e. pour toute suite (x_n) dans X telle que $\lim_{n\to\infty} \|(x_n + x_0)/2\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$, alors $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.*

Preuve : On constate que 1 est équivalent à :

$(\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^*)(\|\sum_{i=1}^{n} a_k e_k\| > \|\sum_{i=1}^{n-1} a_k e_k\|)$ (1').

On pose alors, pour $x \in X$, $\|x\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} |||x\ ||| + \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}|f_k(x)|$. On vérifie que $\|\ \|_1$ est une norme sur X équivalente à $|\ |$ qui vérifie la propriété 1'.

Puis, soit $T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} l_2(\mathbb{N}^*) & \longrightarrow & X \\ (\alpha_k) & \longmapsto & \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}\alpha_k e_k/\|e_k\|_1 \end{pmatrix}$. T est linéaire, continue et d'image dense dans X. Si $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $|x|_n^2 \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\|x - T(y)\|_1^2 + \|y\|^2/n | y \in l_2(\mathbb{N}^*)\}$, ce qui définit une norme sur X équivalente à $\|\ \|_1$ (on a $|\ |_n \leq \|\ \|_1$ et, si $\|x\|_1 = 1$, $|x|_n \geq min(1/(2n^{1/2}\|T\|), 1/2)$ (on le vérifie en séparant les cas $\|y\| \leq 1/(2\|T\|)$ et $\|y\| \geq 1/(2\|T\|)$)).

Ainsi, la norme définie sur X par $\|x\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}|x|_n^2$ est équivalente à $\|\ \|_1$.

Si $x \in X$ et $n \geq 1$, par le théorème du cours de math appliquées sur la minimisation des fonctions sci convexes infinies à l'infini sur un Hilbert (ici $l_2(\mathbb{N}^*)$), on peut dire qu'il existe y(x,n) dans $l_2(\mathbb{N}^*)$ tel que $|x|_n^2 = \|x - T(y(x,n))\|_1^2 + \|y(x,n)\|^2/n$.

Soit maintenant (x_k) une suite dans X telle que $\lim_{k\to+\infty}(2\|x_0\|^2 + 2\|x_k\|^2 - \|x_k + x_0\|^2) = 0$.

On a donc, pour $n \geq 1$, $\lim_{k\to+\infty}(2|x_0|_n^2 + 2|x_k|_n^2 - |x_k + x_0|_n^2) = 0$.

Or $2|x_0|_n^2+2|x_k|_n^2-|x_k+x_0|_n^2 \geq (\|x_0-T(y(x_0,n))\|_1-\|x_k-T(y(x_k,n))\|_1)^2+|y(x_0,n)-y(x_k,n)|^2/n$.
Donc $\lim_{k\to+\infty} \|x_k - T(y(x_k,n))\|_1 = \|x_0 - T(y(x_0,n))\|_1$ et $\lim_{k\to+\infty} y(x_k,n) = y(x_0,n)$.
Si $n \geq 1$, on a $\lim\sup_{k\to+\infty} \|x_0 - x_k\|_1 \leq \lim\sup_{k\to+\infty} \|x_0 - T(y(x_0,n))\|_1 + \|T(y(x_0,n) - y(x_k,n))\|_1 + \|x_k - T(y(x_k,n))\|_1) = 2\|x_0 - T(y(x_0,n))\|_1 \leq 2|x_0|_n$.
Par densité de $T(l_2(\mathbb{N}^*))$ dans X, on a pour x dans X, $\lim_{n\to+\infty} |x|_n = 0$.
Ainsi, $\lim_{k\to+\infty} x_k = x_0$.
Donc, $\| \|$ est localement uniformément convexe.
La propriété 1' se transmet à $\| \|$ (il suffit de le vérifier pour $| |_n$ et on le voit en remarquant que si $(a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{R}^p$, $y(\sum_{i=1}^{p} a_i e_i, n)$ est à support dans $\{1,\dots,p\}$ car $\| \|_1$ est localement uniformément convexe).
On constate enfin que 3 et 1' impliquent 2 (on encadre $\|(x_n + x_0)/2\|$ par $(\|x_n\|_1 + \|x_0\|)/2)$ et $\|(S_K(x_n) + S_K(x_0))/2\| = \|x_0\|+$reste où K est choisi suffisament grand de sorte que le reste soit petit...).
Bilan : $\| \|$ convient.

1.3 Un peu de géométrie

Soit (X,$\| \|$) un Banach de dimension supérieure à 2.
Si $x \in S(0,1)$ et si $\delta \geq 0$, on note $G(x,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \overline{B}(0,1)/(\forall\lambda \in [0,1])(\|\lambda x + (1-\lambda)z\| \geq 1-\delta)\}$ et $\epsilon(x,\delta) = \sup\{\|x-z\|/z \in G(x,\delta)\}$.
On remarque que, si $\delta \geq 1$, $G(x,\delta) = \overline{B}(0,1)$ et $\epsilon(x,\delta) = 1$

Lemme 1.1 *Soit $x \in S(0,1)$ et $0 \leq \delta \leq 1$. Alors il existe $z \in S(0,1) \cap G(x,\delta)$ tel que $[x,z] \cap S(0,1-\delta) \neq \emptyset$.*

Preuve : On considère $F \stackrel{\text{def}}{=} S(0,1) \cap G(x,\delta)$

C'est un fermé de S(0,1) car $F = \bigcap_{\lambda\in[0,1]} \{z \in S(0,1)/\|\lambda x + (1-\lambda)z \geq 1-\delta\|\}$.

F est non vide car $x \in F$ et $F \neq S(0,1)$ car $-x \notin F$. Or S(0,1) est connexe (car $\dim(X) \geq 2$) donc $\partial_{S(0,1)}F \neq \emptyset$. Soit $z \in \partial_{S(0,1)}F$, alors $z \in \partial_{S(0,1)}S(0,1)\backslash F$. Donc $(\forall\epsilon > 0)(\exists z_\epsilon \in S(0,1))(\exists\lambda_\epsilon \in [0,1])(\|z - z_\epsilon\| \leq \epsilon$ et $\|\lambda_\epsilon x + (1-\lambda_\epsilon)z_\epsilon \leq 1-\delta)\|)$. [0,1] est compact donc il existe une suite ϵ_k qui tend vers zéro telle que $\lim_{k\to+\infty} \lambda_{\epsilon_k} = \lambda \in [0,1]$.
On a donc $\lim_{k\to+\infty} \lambda_{\epsilon_k} x + (1-\lambda_{\epsilon_k})z_{\epsilon_k} = \lambda x + (1-\lambda)z$ et donc $\lambda x + (1-\lambda)z \in S(0,1-\delta)$.

Proposition 1.4 *L'application ϵ vérifie les propriétés suivantes :*

1. $(\forall x \in S(0,1))(\forall\delta \in [0,1])(\delta \leq \epsilon(x,\delta) \leq 1)$
2. $(\forall(x,y) \in S(0,1)^2)(\forall\delta \geq 0)(\epsilon(x,\delta) \leq \|x-y\|/2 + \epsilon(y,\delta + \|x-y\|))$
3. $(\forall x \in S(0,1))(\forall\delta > 0)(\forall h \geq 0)(0 \leq \epsilon(x,\delta+h) - \epsilon(x,\delta) \leq 3h\delta^{-2})$
4. *Pour tout r>0, la fonction ϵ est uniformément continue sur $S(0,1) \times [r,+\infty[$. Si, de plus, $\| \|$ est localement uniformément convexe, la fonction ϵ est continue sur $S(0,1) \times [0,+\infty[$ et $\epsilon(x,0) = 0$ pout tout $x \in S(0,1)$.*

Preuve : Voir [BP] p 220-224, le lemme comble un manque dans la preuve.

1.4 Kadec dans le cas où il existe une base de Schauder

Proposition 1.5 *Soit (X,| |) un Banach qui possède une base de Shauder (e_k) et tel que $\| \ \|$ soit une norme équivalente à | | et vérifie les 3 propriétés de la proposition 1.3. Alors, il existe une application continue F de $\overline{B}(0,1)$ dans $\mathbb{R}$ telle que :*

1. *F(0)=0 ; $(\forall x \in X)(0 < \|x\| < 1 \Rightarrow 0 < F(x) < 1)$; $(\forall x \in S(0,1))(F(x) = 1)$.*
2. *Pour tout $n \geq 1$, pour tout $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\|\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k\| < 1$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(\alpha) \stackrel{def}{=} F(\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + \alpha e_n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (et donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$).*
3. *Pour toute suite (a_k) de réels telle que $(\forall n \geq 1)(\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| \leq 1)$ et $\lim_{n \to +\infty} F(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k) = 1$, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k e_k$ converge.*

Preuve : si $x = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) e_k \in X$, on pose :

- $L(x) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{y \in X/(\exists \lambda \in [0,1])(y = \lambda S_n(x) + (1-\lambda) S_{n-1}(x))\}$.
- $\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon(x/\|x\|, 1 - \|x\|)$ $(0 < \|x\| \leq 1)$ et $\varphi(0) = 1$.
- $\phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\varphi(y)/y \in L(x)\}$ $(x \in \overline{B}(0,1))$.
- $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|^2 (1 - \phi(x))^2$ $(x \in \overline{B}(0,1))$.

On vérifie la continuité de ϕ et les trois conditions sur F (voir [BP] p 225-228).

Proposition 1.6 *Si (X,| |) est un Banach qui possède une base de Schauder (e_k), alors X est homéomorphe à $l_2(\mathbb{N}^*)$.*

Preuve : On construit d'abord un homéomorphisme entre les sphères unités.

Si $x \in S_X(0,1)$, on pose $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} ((F(S_n(x)) - F(S_{n-1}(x)))^{1/2} \text{sgn} f_n(x))_{n=1}^{+\infty} \in S_{l_2(\mathbb{N}^*)}(0,1)$.

Enfin, on pose, pour $x \in X$, $H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \|x\| h(\frac{x}{\|x\|})$ si $x \neq 0$ et $H(0) \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

On vérifie que H définit un homéomorphisme de X sur $l_2(\mathbb{N}^*)$ (voir [BP] p 228-230).

1.5 Kadec dans le cas général

Soit (X,$\| \ \|$) un Banach. On pose $c_0(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, X) / \lim_{n \to +\infty} \|x_n\| = 0\}$.

On norme $c_0(X)$ par $\|(x_n)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|x_n\|$ et on vérifie que $c_0(X)$ est un espace de Banach.

Proposition 1.7 *soient (X,$\| \ \|$) et (Y,$\| \ \|$) deux Banachs. Alors :*

1. *$c_0(X \times Y) \sim_H X \times c_0(X \times Y)$.*
2. *Si $X \sim_H Y$, alors $c_0(X) \sim_H c_0(Y)$.*
3. *$c_0(l_1(\mathbb{N}^*))$ possède une base de Schauder.*

Preuve :

Dans le premier cas, on regarde les applications réciproques $\begin{pmatrix} c_0(X\times Y) & \longrightarrow & X\times c_0(X\times Y) \\ (x_n,y_n)_{n\geq 1} & \longmapsto & (x_1,(x_{n+1},y_n)_{n\geq 1}) \end{pmatrix}$ et $\left(\begin{array}{ccc} X\times c_0(X\times Y) & \longrightarrow & c_0(X\times Y) \\ (x,(x_n,y_n)_{n\geq 1}) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & \longmapsto & (x,y_1) \\ n\geq 2 & \longmapsto & (x_{n-1},y_n) \end{pmatrix} \end{array}\right)$. Dans le deuxième cas, si φ est un homéomorphisme de X dans Y, en notant $\overline{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi - \varphi(0)$, on regarde les applications réciproques $\begin{pmatrix} c_0(X) & \longrightarrow & c_0(Y) \\ (x_n)_{n\geq 1} & \longmapsto & (\overline{\varphi}(x_n))_{n\geq 1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c_0(Y) & \longrightarrow & c_0(X) \\ (y_n)_{n\geq 1}) & \longmapsto & (\overline{\varphi}^{-1}(y_n))_{n\geq 1}) \end{pmatrix}$.
Dans le troisième cas, soit α une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. On pose, pour $n\geq 1$, $e_n \stackrel{\text{def}}{=} (f_k)_{k\geq 1}$ où $f_k \in l^1(\mathbb{N}^*)$ avec $f_k(l) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{\alpha(n)}^{(k,l)}$. On vérifie sans peine que, pour $(g_k)_{k\geq 1} \in c_0(l_1(\mathbb{N}^*))$, on a $(g_k)_{k\geq 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} g_{\alpha_1(n)}(\alpha_2(n))e_n$ (en notant $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$).

Pour l'unicité, on remarque que $(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i e_i)_k(l) = a_{\alpha^{-1}(k,l)}$.

Proposition 1.8 $l_2(\mathbb{N}^*) \sim_I l_2(\mathbb{N}^*)\times l_2(\mathbb{N}^*)$.

Preuve : On pose sur $l_2(\mathbb{N}^*)\times l_2(\mathbb{N}^*)$ le produit scalaire euclidien :

$<(x_1,x_2)|(y_1|y_2)> \stackrel{\text{def}}{=} <x_1|y_1>_{l_2(\mathbb{N}^*)} + <x_2|y_2>_{l_2(\mathbb{N}^*)}$. On a alors un Hilbert séparable et de dimension infinie qui est donc homéomorphe à $l_2(\mathbb{N}^*)$ (et même isométrique).

Proposition 1.9 *Soit $(X,\| \|)$ un Banach séparable. Alors, il existe une surjection linéaire et continue de $l_1(\mathbb{N}^*)$ sur X.*

Preuve : X est séparable donc $\overline{B}_X(0,1)$ aussi. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\overline{B}_X(0,1)$ d'image dense.

$Vect\{e_k/k\geq 1\}$ est dense dans $l_1(\mathbb{N}^*)$ ($e_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \delta_n^k \end{pmatrix}$). On pose $\varphi(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k) \stackrel{\text{def}}{=} (\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k)$. φ est linéaire et continue de $Vect\{e_k/k\geq 1\}$ dans X (de norme inférieure à 1) donc il existe un unique prolongement linéaire et continu de φ à $l_1(\mathbb{N}^*)$ que l'on note encore φ. Pour montrer que φ est surjective, il suffit de montrer qu'elle surjecte $\overline{B}_X(0,1)$ (linéarité). Soit $x\in\overline{B}_X(0,1)$. On a $i_1\in\mathbb{N}^*$ tel que $\|x-x_{i_1}\|\leq 1/2$. Donc $2(x-x_{i_1})\in\overline{B}_X(0,1)$. On a $i_2>i_1$ tel que $\|2(x-x_{i_1})-x_{i_2}\|\leq 1/4$. Donc $4(2(x-x_{i_1})-x_{i_2})\in\overline{B}_X(0,1)$. On a $i_3>i_2$ tel que $\|4(2(x-x_{i_1})-x_{i_2})-x_{i_3}\|\leq 1/8$... On construit ainsi par récurrence une suite strictement croissante $(i_k)_{k\geq 1}$ d'indices. On vérifie que $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k+1}e_{i_k}\in l_1(\mathbb{N}^*)$ et que $x = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k+1}x_{i_k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\varphi(2^{-k+1}e_{i_k}) = \varphi(\sum_{k=1}^{+\infty}2^{-k+1}e_{i_k})$.

Théorème 1.1 (Kadec, 1967) *Si $(X, \| \|)$ est un Banach séparable de dimension infinie, alors X est homéomorphe à $l_2(\mathbb{N}^*)$.*

Preuve :

D'après la proposition 1.2, il existe un sous espace F de X qui possède une base de Schauder. D'après la proposition 1.6, le théorème de Bartle-Graves et la proposition 1.8, on a : $X \sim_H (X/F) \times F \sim_H (X/F) \times l_2(\mathbb{N}^*) \sim_H (X/F) \times l_2(\mathbb{N}^*) \times l_2(\mathbb{N}^*) \sim_H (X/F) \times F \times l_2(\mathbb{N}^*) \sim_H X \times l_2(\mathbb{N}^*)$.
D'après le théoreme de Bartle-Graves et la proposition 1.9, il existe un Banach Y tel que $l_1(\mathbb{N}^*) \sim_H X \times Y$.
Donc, d'après la proposition 1.7 : $c_0(l_1(\mathbb{N}^*)) \sim_H c_0(X \times Y) \sim_H X \times c_0(X \times Y) \sim_H X \times c_0(l_1(\mathbb{N}^*))$.
Or $c_0(l_1(\mathbb{N}^*))$ possède une base de Schauder (proposition 1.7), donc $c_0(l_1(\mathbb{N}^*)) \sim_H l_2(\mathbb{N}^*)$.
Ainsi, $X \sim_H X \times l_2(\mathbb{N}^*) \sim_H l_2(\mathbb{N}^*)$.

Ce résultat a été généralisé par Torunczyk en 1981 et permet de classifier tous les Banachs : deux Banachs de dimension infinie sont homéomorphes si et seulement si ils ont le même caractère de densité (le caractère de densité d'un Banach X est le plus petit cardinal de ses parties denses).

2 Classification par bijection bi-uniformément continue

2.1 Fonctions lipschitziennes pour les grandes distances

Soit f une application de X dans Y.
On dit que f est lipschitzienne pour les grandes distances si
$(\forall\delta > 0)(\exists K \geq 0)(\forall(x,y) \in X^2)(\|x-y\| \geq \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leq K\|x-y\|)$

Proposition 2.1 *Si f est uniformément continue , f est lipschitzienne pour les grandes distances.*

Preuve : Soit $\delta > 0$. f est uniformément continue donc
$(\exists\eta > 0)(\forall(x,y) \in X^2)(\|x-y\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leq \delta)$
Soient x et y dans X tels que $\|x-y\| \geq \delta$.
Soit $n = \lfloor \|x-y\|/\eta \rfloor$ et si $i \in \{0,\ldots,n\}$, soit $x_i = x + \eta i(y-x)/\|x-y\|$ et $x_{n+1} = y$.
Alors, si $i \in \{0,\ldots,n\}$, $\|x_{i+1} - x_i\| \leq \eta$.
Ainsi, $\|f(x)-f(y)\| \leq \sum_{i=0}^{n} \|f(x_{i+1}) - f(x_i)\| \leq (n+1)\delta \leq (\delta/\eta)\|x-y\| + \delta \leq (\delta/\eta + 1)\|x-y\|$.
En posant $K = \delta/\eta + 1$ (indépendent de x et y), on a le résultat.

Si f est uniformément continue de X dans Y, on peut donc poser pour $t > 0$,
$L(f,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|x_1-x_2\| \geq t} \|f(x_1)-f(x_2)\|/\|x_1-x_2\|$. Ceci dfinit une fonction décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+$ qui admet une limite en $+\infty$ notée $L(f,+\infty)$.
Si f est de plus bijective, d'inverse uniformément continue , on a $L(f,+\infty) > 0$.
Si f est uniformément continue , en posant $\delta = 1$, on dispose de $\eta > 0$ tel que $(\forall(x,y) \in X^2)(\|x-y\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leq \delta)$ et, en posant $K(f) \stackrel{\text{def}}{=} L(f,\eta)$, on a $(\forall(x,y) \in X^2)(\|f(x)-f(y)\| \leq \min(1, K(f)\|x-y\|) \leq 1 + K(f)\|x-y\|)$.

2.2 Ultraproduits

Soit (X,$\|\ \|$) un Banach. On note B(X) l'ensemble des suites bornées de X. On le munit de la norme $\|x\|_{B(X)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ qui en fait un Banach.
Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ plus fin que Fréchet, on définit sur B(X) la relation d'équivalence $(x_n) \sim_{\mathcal{U}} (y_n) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{\mathcal{U}} \|x_n - y_n\| = 0$.
Cette limite existe toujours car la suite $\|x_n - y_n\|$ est bornée donc à valeurs dans un compact de $\mathbb{R}$.
On pose $X_{\mathcal{U}} \stackrel{\text{def}}{=} B(X)/\sim_{\mathcal{U}}$.
$X_{\mathcal{U}}$ est l'espace vectoriel quotient de B(X) par l'espace vectoriel $\{x \in B(X)/\lim_{\mathcal{U}} \|x_n\| = 0\} \stackrel{\text{def}}{=} F$.
On norme $X_{\mathcal{U}}$ par $\|\overline{x}\|_{\mathcal{U}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\|$.
F est fermé dans B(X) donc il existe sur B(X)/F une norme quotient donnée par $\|\overline{x}\|_F \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y\sim_F x} \|y\|_{B(X)}$.
On a $\|\overline{x}\|_{\mathcal{U}} = \|\overline{x}\|_F$. En effet, si $y \sim_{\mathcal{U}} x$, $\|\overline{x}\|_{\mathcal{U}} = \|\overline{y}\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|y_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|$ donc $\|\overline{x}\|_{\mathcal{U}} \leq \|\overline{x}\|_F$.
Réciproquement, on veut $y \sim_{\mathcal{U}} x$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})(\|y_n\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\|)$, On pose $y_n \stackrel{\text{def}}{=} x_n\|\overline{x}\|_{\mathcal{U}}/\|x_n\|$ si $x \neq 0$ et $y_n \stackrel{\text{def}}{=} 0$ si $x = 0$ et on vérifie que ça marche.
Enfin, $X_{\mathcal{U}}$ est un Banach. En effet, soit $(\overline{x}^N)_{N\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $X_{\mathcal{U}}$. Soit $y^0 \in \overline{x}^0$. On définit $y^N \in \overline{x}^N$ par recurrence sur N. Si y^k est construit pour $k \leq N$, il existe $y^{N+1} \in \overline{x}^{N+1}$ tel que $\|y^{N+1} - y^N\|_{B(X)} \leq \|\overline{y}^{N+1} - \overline{y}^N\|_{\mathcal{U}} + 2^{-N}$. Ainsi, y^N est de Cauchy dans B(X) qui est complet.

D'où $y \in B(X)$ tel que $y = \lim_{N \to +\infty} y^N$ dans B(X). On a $\|\overline{x}^N - \overline{y}\|_{\mathcal{U}} = \|\overline{y}^N - \overline{y}\|_{\mathcal{U}} \leq \|y^N - y\|_{B(X)}$, donc $\overline{x}^N$ converge vers $\overline{y}$ dans $X_{\mathcal{U}}$ qui est donc complet.

Il existe une isométrie linéaire de X dans $X_{\mathcal{U}}$ donnée par $\left(\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_{\mathcal{U}} \\ x & \longmapsto & \overline{\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & X \\ n & \longmapsto & x \end{array}\right)} \end{array}\right)$.

Soit (Y,$\|\ \|$) un autre Banach. Si f est une bijection bi-uniformément continue de X dans Y, alors on pose $B(f) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{ccc} B(X) & \longrightarrow & B(Y) \\ x & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & Y \\ n & \longmapsto & f(nx_n)/n \end{array}\right) \end{array}\right)$ qui est bien définie car, si $(x_n) \in B(X)$, $\|f(nx_n) - f(0)\| \leq 1 + nK(f)\|x_n\|$ donc, $\|f(nx_n)/n\| \leq 1/n + K(f)\|x_n\| + \|f(0)\|$ est borné en n. Puis, $B(f)$ passe au quotient en $\overline{B(f)}$ de $X_{\mathcal{U}}$ dans $Y_{\mathcal{U}}$ car, si $y \sim_{\mathcal{U}} x$ dans B(X), $\|f(nx_n)/n - f(ny_n)/n\| \leq 1/n + K(f)\|x_n - y_n\|$ tend vers zéro selon $\mathcal{U}$ et donc, $B(f)(x) \sim_{\mathcal{U}} B(f)(y)$.
Puis, $\overline{B(f)}$ est K(f)-lipschitzienne et bijective d'inverse $\overline{B(f)}^{-1} = \overline{B(f^{-1})}$ (on vérifie que $\overline{B(f \circ g)} = \overline{B(f)} \circ \overline{B(g)}$). En échangeant f et f^{-1}, on déduit la proposition :

Proposition 2.2 *$\overline{B(f)}$ est une bijection bilipschitzienne donc, $X_{\mathcal{U}} \sim_L Y_{\mathcal{U}}$.*

2.3 Espaces $\mathcal{L}_p$

Si X et Y sont des Banachs linéairement homéomorphes, on note d(X,Y) l'inf des $\|T\|\|T^{-1}\|$ pour T homéomorphisme linéaire de X dans Y (c'est la "distance" de Banach-Mazur entre X et Y).
Soit $1 < p < +\infty$.
Un Banach X est un espace $\mathcal{L}_p$ s'il existe $K \geq 1$ tel que pour tout sous espace vectoriel B de X de dimension finie, il existe un sous espace vectoriel C de X de dimension finie contenant B tel que $d(C, l_p(\{1, \ldots, dim(C)\})) \leq K$.

Proposition 2.3 *$l_p(\mathbb{N}^*)$ est un espace $\mathcal{L}_p$.*

Preuve : Soit B un sous espace de $l_p(\mathbb{N}^*)$ de dimension $n \geq 1$. Soit $\delta \in]0, 1[$.

$B = Vect\{f_1, \ldots, f_n\}$ avec $\|f_i\| = 1$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$. Par équivalence des normes dans B, il existe $K \geq 1$ tel que $(\forall (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n)(\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|/K \leq \|\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\| \leq K \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|)$.

Soit $\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \min(1/4, \delta/(2nK)) > 0$. Il existe $M \geq 1$ tel que $\|g_i - f_i\| \leq \epsilon/4$ où on a posé $g_i(k) \stackrel{\text{def}}{=} f_i(k)$ si $k \leq M$ et $g_i(k) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ sinon $(i \in \{1, \ldots, n\})$.

Soit $D \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in l_p(\mathbb{N}^*)/(\forall k > M)(f(k) = 0)\}$. C'est un sous espace de $l_p(\mathbb{N}*)$ de dimension M isomérique à $l_p(\{1, \ldots, M\})$. Soit $g'_i \stackrel{\text{def}}{=} g_i/\|g_i\|$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$. On a $\|g'_i - f_i\| \leq \|(g_i - f_i)/\|g_i\|\| + (1 - \|g_i\|)\|f_i\| \leq \epsilon$ (car $0 \leq 1 - \|g_i\| \leq \epsilon/4 \leq 1/16$). Puis $(\forall (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n)(\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|/2K \leq \|\sum_{i=1}^n \lambda_i g'_i\| \leq 2K \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|)$. Ainsi, $(g'_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

Sur $E \stackrel{\text{def}}{=} Vect\{g'_i/1 \leq i \leq n\} \subset D$, on pose φ_i l'unique élément de E' tel que $\varphi_i(g'_j) = \delta_i^j$ $((i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2)$. On a $\|\varphi_i\| \leq 2K$ donc, par Hahn-Banach, φ_i se prolonge sur $l_p(\mathbb{N}^*)$ avec $\|\varphi_i\| \leq 2K$ $(1 \leq i \leq n)$. Soit $T \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & l_p(\mathbb{N}^*) \\ h & \longmapsto & h + \sum_{i=1}^n \varphi_i(h)(f_i - g'_i) \end{array}\right)$. On a $T(g'_i) = f_i$ donc $B \subset C \stackrel{\text{def}}{=} T(D)$.

Puis, on a $(\forall h \in D)((1-\delta)\|h\| \le \|T(h)\| \le (1+\delta)\|h\|)$, donc $\|T\|\|T^{-1}\| \le (1+\delta)/(1-\delta)$.
D est isomérique à $l_p(\{1,\dots,M\})$ donc $d(C, l_p(\{1,\dots,M\})) \le (1+\delta)/(1-\delta)$.

Proposition 2.4 (Ribe) *Si $X \sim_U l_p(\mathbb{N}^*)$, X est un espace $\mathcal{L}_p$ séparable.*

Preuve : Admis, voir [HM]

Proposition 2.5 (Lindenstrauss-Pelczynski) *Si X est un espace $\mathcal{L}_p$ séparable, X est linéairement homéomorphe à un sous espace F complémenté de $L_p([0,1])$ (i.e. il existe une projection linéaire continue de $L_p([0,1])$ sur F).*

Preuve : Admis, voir [LT]

2.4 Principe de Gorelik (1994)

Si f est une application uniformément continue entre les Banachs X et Y, on note, pour $t \ge 0$, $w(f,t) \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\|x-y\|\le t} \|f(x)-f(y)\|$ (ce sup est inférieur à 1+tK(f)).

Proposition 2.6 (lemme fondamental) *Soit X un Banach et X_0 un sous espace de X de codimension finie. Si $d > d' > 0$, il existe un compact A de $B_X(0,d)$ tel que $(\forall \phi \in C^0(A,X))((\forall a \in A)(\|\phi(a)-a\| \le d') \Rightarrow (\phi(A)\cap X_0 \neq \emptyset))$.*

Preuve : D'après le 3 du théorème de Bartle-Graves, il existe f de $\overline{B}_{X/X_0}(0,d')$ dans $\overline{B}_X(0,\frac{d+d'}{2})$

tel que $\pi \circ f = Id_{\overline{B}_{X/X_0}(0,d')}$. Soit $A \overset{\text{def}}{=} f(\overline{B}_{X/X_0}(0,d')) \subset B_X(0,d)$. C'est un compact car f est continue et X/X_0 est de dimension finie.
Soit ϕ une fonction continue de A dans X telle que $(\forall a \in A)(\|\phi(a)-a\| \le d')$.
Soit $\varphi \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \overline{B}_{X/X_0}(0,d') & \longrightarrow & \overline{B}_{X/X_0}(0,d') \\ x & \longmapsto & x - \pi\circ\phi\circ f(x) \end{pmatrix}$.
On vérifie que φ est bien définie et continue (si $x \in \overline{B}_{X/X_0}(0,d')$, alors $f(x) \in A$ et $\|\phi(f(x)) - f(x)\| \le d'$ et, comme π est 1-lipschitzienne , $\|\pi\circ\phi\circ f(x) - x\| \le d'$).
D'aprés le théorème de Brouwer, φ admet un point fixe x_0 qui vérifie $\pi\circ\phi\circ f(x_0) = 0$ donc $\phi\circ f(x_0) \in \ker(\pi) = X_0$ et $x_0 \in A \cap X_0 \neq \emptyset$.

Proposition 2.7 (Gorelik [GKL]) *Soient X et Y deux Banachs et f un homéomorphisme de X dans Y d'inverse uniformément continue . Soit X_0 un sous espace de X de codimension finie. Soient $b > 0$ et $d > w(f^{-1},b)$. Alors, il existe un compact K de Y tel que $\overline{B}_Y(0,b) \subset K + f(B_X(0,2d)\cap X_0)$.*

Preuve : Soit $d' \overset{\text{def}}{=} w(f^{-1},b)$ et $K \overset{\text{def}}{=} -f(A)$ où A est le compact obtenu par le lemme

fondamental pour X, X_0, d, d' $(A \subset B_X(0,d))$. Soit $x \in \overline{B}_Y(0,b)$.
On pose $\phi \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & X \\ a & \longmapsto & f^{-1}(x+f(a)) \end{pmatrix}$. ϕ vérifie $(\forall a \in A)(\|\phi(a)-a\| \le d')$ car $\|a-\phi(a)\| = \|f^{-1}\circ f(a) - f^{-1}(x+f(a))\| \le w(f^{-1},b)$ donc $(\exists a \in A)(\phi(a) \in X_0)$.
Or $\|\phi(a)\| \le \|a\| + \|a-\phi(a)\| < 2d'$ donc $x + f(a) = f(\phi(a)) \in f(B_X(0,2d)\cap X_0)$ donc $x \in -f(a) + f(B_X(0,2d)\cap X_0) \subset K + f(B_X(0,2d)\cap X_0)$.

Proposition 2.8 (Gorelik [JLS]) *Soient X et Y deux Banachs et f un homéomorphisme de X dans Y d'inverse uniformément continue . Soit X_0 un sous espace de X de codimension finie et Y_0 un sous espace de Y de codimension infinie. Soient $b > 0$ et $d > 0$. Si $f(B_X(0,d)\cap X_0) \subset Y_0 + B_Y(0,b)$, alors $w(f^{-1},2b) \ge d/2$.*

Preuve : Par l'absurde, $w(f^{-1}, 2b) < d/2$. On pose $B \stackrel{\text{def}}{=} 2b$ et $D \stackrel{\text{def}}{=} d/2$ donc $w(f^{-1}, B) < D$.

D'aprés Gorelik [GKL], il existe un compact K de Y tel que $\overline{B}_Y(0, B) \subset K + f(B_X(0, 2D) \cap X_0)$.

Ainsi, $\overline{B}_Y(0, 2b) \subset K + Y_0 + B_Y(0, b)$.

K est compact donc on $x_1, \ldots, x_n$ dans K tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, b)$.

Donc, en posant $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$, on a $\overline{B}(0, 2b) \subset \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, b) + Y_0$.

Donc, en projetant sur Y/Y_0, $B_{Y/Y_0}(0, 2b) \subset \bigcup_{i=0}^{n} B_{Y/Y_0}(x_i, b)$.

Y/Y_0 est de dimension infinie donc il existe un espace vectoriel Z de dimension finie supérieure à n+2 tel que $\{x_i / 0 \leq n\} \subset Z \subset Y/Y_0$. On a (norme induite) $B_Z(0, 2b) \subset \bigcup_{i=0}^{n} B_Z(x_i, b)$ ce qui crée une contradidtion en prenant les mesures de Lebesgue.

Le principe de Gorelik a redonné un souffle à la théorie de la classification non linéaire des espaces de Banach. Par exemple, il a permi de montrer que $X \sim_L c_0(\mathbb{N}) \Rightarrow X \sim_I c_0(\mathbb{N})$. Par ailleurs, il permet de construire pour n entier, un Banach X séparable tel que sa calsse d'équivalence pour $\sim_U$ soit réunion d'exactement 2^n classes pour $\sim_I$. En particulier, cela fournit un exemple de Banach séparable X tel que $Y \sim_U X \not\Rightarrow Y \sim_I X$ (on ne connait pas de contre exemple séparable pour la classification lipschitzienne).

2.5 Le cas des l_p

Dans cette dernière partie, on se propose de montrer que, dans le cas $1 < p < +\infty$, si un Banach X est tel que $X \sim_H l_p(\mathbb{N}^*)$, alors $X \sim_I l_p(\mathbb{N}^*)$. Soit $1 < p < +\infty$.

2.5.1 le cas p=2

On utilise dans cette partie des résultats démontrés dans le rapport de Glenn Merlet sur la classification lipschitzienne des espaces de Banach. Soit X un Banach tel que $X \sim_U l_2(\mathbb{N}^*)$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$. Si (x_n) et (y_n) sont dans $B(l_2(\mathbb{N}^*))$, on pose $< \overline{x} | \overline{y} > \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\mathcal{U}} \sum_{k=1}^{+\infty} x_n^k y_n^k$ (cette limite existe d'après Cauchy-Schwarz). Ceci définit un produit scalaire euclidien sur $l_2(\mathbb{N}^*)_{\mathcal{U}}$ dont la norme est la même que la norme initiale. Donc $l_2(\mathbb{N}^*)_{\mathcal{U}}$ est un espace de Hilbert et est donc réflexif donc a la RNP [cf corollaire 1.1]. On a, d'après la proposition 2.2, $X_{\mathcal{U}} \sim_L l_2(\mathbb{N}^*)_{\mathcal{U}}$ et comme il existe une isométrie linéaire de X dans $X_{\mathcal{U}}$, on a une injection f bilipschitzienne de X séparable dans $l_2(\mathbb{N}^*)_{\mathcal{U}}$ qui a la RNP. Cette application est donc Gâteaux-différentiable en un point x_0 [cf théorème 1.3]. On note T la Gâteaux-différentielle de f en ce point. Il suffit, pour avoir notre homéomorphisme linéaire que T soit injective et que son image soit fermée car cette image serait alors linéairement homéomorphe à $l_2(\mathbb{N}^*)$ (car ce serait un sous espace fermé séparable et de dimension infinie d'un Hilbert).

Proposition 2.9 *T est injective et son image est fermée dans $l_2(\mathbb{N}^*)_{\mathcal{U}}$.*

Preuve : Soient x et y dans X et $t > 0$. On a :

$\|x-y\| = \|f^{-1}\circ f(x_0+tx) - f^{-1}\circ f(x_0+ty)\|/t \leq K\|f(x_0+tx)-f(x_0+ty)\|/t \leq K\|(f(x_0+tx)-f(x_0)-tT(x)) - (f(x_0+ty)-f(x_0)-tT(y)) + t(T(x)-T(y))\|/t \leq K(\|(f(x_0+tx)-f(x_0))/t - T(x)\| + \|(f(x_0+ty)-f(x_0))/t - T(y)\| + \|T(x-y)\|)$ (K est le rapport de Lipschitz de f^{-1} lorsqu'on corestreint f à son image). Puis on fait tendre t vers zéro pour avoir $\|x-y\| \leq K\|T(x)-T(y)\|$. Ainsi, T est injective et, quitte à corestreindre T à son image, on peut considérer T^{-1} qui est K-lipschitzienne donc T est bilipschitzienne , donc T(X) est complet (car X l'est), donc est fermé dans $l_2(\mathbb{N}^*)_{\mathcal{U}}$.

2.5.2 le cas p$\neq$ 2

Proposition 2.10 (Johnson Odell) *Si un Banach X est linéairement homéomorphe à un sous espace complémenté de $L_p([0,1])$ et est tel qu'aucun de ses sous espaces ne soit linéairement homéomorphe à $l_2(\mathbb{N}^*)$, alors $X \sim_I l_p(\mathbb{N}^*)$.*

Preuve : Admis, voir [JO]

Ainsi, pour conclure, il suffit de montrer que si $X \sim_U l_p(\mathbb{N}^*)$, $l_2(\mathbb{N}^*)$ n'est linéairement homéomorphe à aucun sous espace de X :

Proposition 2.11 (Bourgain) *Si $1 < p < 2$ et si $X \sim_U l_p(\mathbb{N}^*)$, $l_2(\mathbb{N}^*)$ n'est linéairement homéomorphe à aucun sous espace de X.*

Preuve : Admis

Proposition 2.12 ([JLS]) *Si $2 < p < +\infty$ et si X est un Banach linéairement homéomorphe à un sous espace complémenté de $L_p([0,1])$, alors $l_2(\mathbb{N}^*)$ n'est linéairement homéomorphe à aucun sous espace de X.*

Preuve : Admis, c'est une conséquence du principe de Gorelik (Voir [JLS]).

Références

[B] Yoav Benyamini *The uniform classification of Banach spaces*, Longhorn Notes, Texas Functional analysis Seminar, 1984-85.

[BP] C. Bessaga, A. Pelczynski, *Selected topics in infinite-dimensional topology*, 1975.

[DGZ] Robert Deville, Gilles Godefroy, Václav Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and surveys in Pure and Applied Mathematics, 1993.

[GKL] G. Godefroy, N. Kalton, G. Lancien, *Subspaces of* $c_0(\mathbb{N})$ *and Lipschitz isomorphisms*, Prépublications de l'équipe de mathématiques de Besançon, 1999.

[HHZ] Petr Habala, Petr Hájek, Václav Zizler *Introduction to Banach Spaces II*, Matfyzpress, 1996.

[HM] S. Heinrich, P. Mankiewicz *Application of ultrapowerws to the uniform and Lipschitz classification of Banach spaces*, Studia Math 73, 1982.

[JLS] W.B Johnson, J. Lindenstrauss, G. Schechtman, *Banach spaces determined by their uniform structures*, Geometric And Functional Analysis 3, 1996.

[JO] W.B Johnson, E. Odel, *Subspaces of* L_p *which embed into* l_p, Composito Math 28, 1974.

[LT] Joram Lindenstrauss, Lior Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, Springer Verlag Lecture Notes in Mathematics 338, 1973.