Institut Galilée
Année 1998-1999

DEUG MIAS1
Principes de calcul

T.D. 6

Ensembles récursivement énumérables

Exercice 1

Soit $I \subseteq \mathbb{N}$. On dit que I est **récursivement énumérable** si $I = \emptyset$ ou s'il existe une fonction *totale* récursive $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$I = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

1.1 Soit $I \subseteq \mathbb{N}$. Montrer que si I est récursivement énumérable, alors la fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$\varphi(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ \uparrow & \text{sinon} \end{cases}$$

est récursive.

2.2 Soit I une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $a \in I$. Montrer que si I est le domaine d'une fonction récursive $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et si $\mathcal{P}$ est un programme calculant φ, alors la fonction $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$h(i,j) \;=\; \begin{cases} i & \text{si le programme } \mathcal{P} \text{ lancé sur } i \\ & \quad \text{s'arrête en au plus } j \text{ étapes} \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

est récursive.

[<u>Indication</u> : utiliser le théorème 3.13 du cours (théorème de comptage des étapes).]

1.3 Soit $I \subseteq \mathbb{N}$. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) I est récursivement énumérable ;

(ii) I est le domaine d'une fonction (partielle) récursive.

1.4 Soit $I \subseteq \mathbb{N}$. Montrer que I est récursif, alors I et $\mathbb{N} - I$ sont récursivement énumérables.

Exercice 2

Soit $K = \{n \in \mathbb{N} \mid \Phi^{(1)}(n,n)\downarrow\}$.

2.1 Montrer que K est récursivement énumérable.

2.2 Montrer que $\overline{K} = \mathbb{N} - K$ n'est pas récursivement énumérable.