Institut Galilée | DEUG MIAS1
Année 1998-1999 | Principes de calcul

T.D. 5 (corrigé)

Récursion et calculabilité

Exercice 1

Montrer que la fonction $f \in \mathcal{F}_1$ qui à x associe $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ (*i.e.* la partie entière par défaut de la racine carrée de x) est primitive récursive.

Corrigé :

$f(x) = g(x,x)$ où $g(x,y) = \min_{z \leq y}[z^2 \leq x \wedge (z+1)^2 > x]$.

Exercice 2

2.1 Montrer que la fonction $h \in \mathcal{F}_1$ qui à x associe le plus petit nombre premier supérieur à x est récursive. En admettant que l'ensemble des nombres premiers est infini, montrer que h est totale.

2.2 Montrer que la fonction pr de $\mathcal{F}_1$ définie par

$$\mathrm{pr}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \text{le } x\text{ème nombre premier si } x \geq 1 \end{cases}$$

est primitive récursive. [Indication : on admettra que si p est un nombre premier, alors il existe un nombre premier q tel que $p < q \leq p! + 1$.]

2.3 Montrer que pour tout $i \geq 1$, la fonction $\beta_i \in \mathcal{F}_1$ qui à x associe le plus grand z tel que $(\mathrm{pr}(i))^z$ divise s est primitive récursive.

Corrigé :

2.1 $h(x) = \min_t[\mathrm{Premier}(t) \wedge t > x]$. Si l'ensemble des nombres premiers est infini, alors pour tout $x \in \mathbb{N}$, il existe un nombre premier $> x$ et h est totale.

2.2 Soit $k(x) = g(x, x!+1)$ où $g(x_1, x_2) = \min_{t \leq x_2}[\text{Premier}(t) \wedge t > x_1]$. Les fonctions g et h sont primitives récursives. La fonction pr est alors obtenue par

$$\text{pr}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \text{le } k(\text{pr}(x)) \text{ sinon} \end{cases}$$

2.3 On écrit $\beta_i(x) = \kappa_i(x, x)$ où

$$\kappa_i(x, y) = \min_{z \leq y}[\text{Divise}((\text{pr}(i))^z, x) \wedge \neg\text{Divise}((\text{pr}(i))^{z+1}, x)].$$

Exercice 3

Soit Fib la fonction de $\mathcal{F}_1$ définie par :

$$\begin{cases} \text{Fib}(0) = \text{Fib}(1) = 1 \\ \text{Fib}(n+2) = \text{Fib}(n+1) + \text{Fib}(n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3.1 Montrer que Fib est récursive (*i.e.* calculable).

3.2 On rappelle qu'on a une bijection primitive récursive $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et deux fonctions primitives récursives π_1 et π_2 de $\mathcal{F}_1$ qui vérifient pour tout couple (m, n) d'entiers naturels :

$$\pi_1(\langle m, n \rangle) = m \qquad \text{et} \qquad \pi_2(\langle m, n \rangle) = n.$$

Soit g la fonction de $\mathcal{F}_1$ définie pour tout entier naturel n par :

$$g(n) = \langle \text{Fib}(n), \text{Fib}(n+1) \rangle.$$

Exprimer $g(n+1)$ en fonction de $g(n)$ en utilisant exclusivement l'addition et les fonctions $\langle \cdot, \cdot \rangle$, π_1 et π_2.

3.3 Montrer que g est primitive récursive.

3.4 Montrer que Fib est primitive récursive.

Corrigé :

3.1

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{IF } X = 0 \text{ GOTO } B \\
 & \text{IF } X = 1 \text{ GOTO } B \\
 & Z_1 \leftarrow 1 \\
 & Y \leftarrow 2 \\
[A] & \text{IF } X = 2 \text{ GOTO } E \\
 & Z_2 \leftarrow Y \\
 & Y \leftarrow Z_1 + Y \\
 & Z_1 \leftarrow Z_2 \\
 & X \leftarrow X - 1 \\
 & \text{GOTO } A \\
[B] & Y \leftarrow Y + 1
\end{array}
$$

3.2

$$
\begin{array}{rcl}
g(n+1) & = & \langle \mathrm{Fib}(n+1), \mathrm{Fib}(n+2) \rangle \\
 & = & \langle \pi_2(g(n)), \mathrm{Fib}(n) + \mathrm{Fib}(n+1) \rangle \\
 & = & \langle \pi_2(g(n)), \pi_1(g(n)) + \pi_2(g(n)) \rangle
\end{array}
$$

3.3

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
g(0) & = & \langle 1, 1 \rangle \\
g(n+1) & = & \langle \pi_2(g(n)), \pi_1(g(n)) + \pi_2(g(n)) \rangle
\end{array}
\right.
$$

et g est primitive récursive car obtenue par récursion primitive à partir de la constante $\langle 1, 1 \rangle$ et de la fonction de $\mathcal{F}_2$ définie par

$$(x, y) \mapsto \langle \pi_2(y), \pi_1(y) + \pi_2(y) \rangle$$

qui est primitive récursive car l'addition et les fonctions $\langle \cdot, \cdot \rangle$, π_1 et π_2 le sont.

3.4 On a $\mathrm{Fib} = \pi_1 \circ g$, donc Fib est primitive récursive.

Exercice 4

Le nombre C_n^p de sous-ensembles à p éléments dans un ensemble à n éléments est défini par

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
C_n^p & = & C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} & \text{si } 0 < p < n \\
C_n^p & = & 1 & \text{si } p = 0 \text{ ou } n = p \\
C_n^p & = & 0 & \text{si } p > n
\end{array}
\right.
$$

4.1 En remarquant que si $n \geq p \geq 0$,

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

montrer “ directement ” que la fonction Comb $\in \mathcal{F}_2$ définie par $\mathrm{Comb}(n,p) = C_n^p$ est primitive récursive.

4.2 Montrer que la fonction Comb est primitive récursive en utilisant la technique de l'exercice 3.