T.D. 4

Fonctions (primitives) récursives

Exercice 1

On cherche à numéroter (à partir de 0) les couples d'entiers (x_1, x_2) à l'aide d'une bijection f en parcourant $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
\hline
0 & 0 & 2 & 5 & 9 & \nearrow & \\
1 & 1 & 4 & 8 & \nearrow & & \\
2 & 3 & 7 & \nearrow & & & \\
3 & 6 & \nearrow & & & & \\
\vdots & \nearrow & & & & &
\end{array}$$

1.1 Montrer que ce parcours de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ selon les diagonales correspond à la fonction f définie par :

$$f(x_1, x_2) = x_2 + \sum_{k=1}^{x_1+x_2} k.$$

L'usage est de noter $\langle\cdot,\cdot\rangle$ cette fonction ; on écrit donc $\langle x_1, x_2\rangle$ au lieu de $f(x_1, x_2)$.

1.2 Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est primitive récursive.

1.3 Soit la fonction $\mathrm{cd} \in \mathcal{F}_1$ définie par : $\mathrm{cd}(n)$ est le numéro de la diagonale sur laquelle se trouve le $n$ème couple d'entiers (c'est-à-dire le couple (x_1, x_2) tel que $\langle x_1, x_2\rangle = n$.)

On remarque que les $n$ème et $(n+1)$ème couples d'entiers naturels se trouvent sur la même diagonale si et seulement si $n+1 < \langle \mathrm{cd}(n)+1, 0\rangle$.

Montrer que cd est primitive récursive.

1.4 En déduire que les fonctions π_1 et π_2 définies par

$$\pi_1(\langle x_1, x_2\rangle) = x_1 \qquad \text{et} \qquad \pi_2(\langle x_1, x_2\rangle) = x_2$$

sont primitives récursives.

Exercice 2

Soit P un prédicat primitif récursif d'arité n. Soient g et h des fonctions primitives récursives d'arité n. Montrer que la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n) & \text{si } P(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n) & \text{sinon} \end{cases}$$

est primitive récursive.

Exercice 3

3.1 Montrer que le prédicat binaire P défini par

$$P(x_1, x_2) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$$

est primitif récursif.

3.2 Montrer que le prédicat unaire Pair défini par

$$\begin{cases} \text{Pair}(x) = \text{faux} & \text{si } x \text{ impair} \\ \text{Pair}(x) = \text{vrai} & \text{si } x \text{ pair} \end{cases}$$

est primitif récursif.

3.3 Montrer que le prédicat binaire Divise défini par

$$\text{Divise}(x_1, x_2) \Leftrightarrow x_1 \text{ divise } x_2$$

est primitif récursif.

3.4 Montrer que le prédicat unaire Premier défini par

$$\text{Premier}(x) \Leftrightarrow x \text{ est premier}$$

est primitif récursif.

Exercice 4

Montrer que la fonction $f \in \mathcal{F}_3$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1 - x_2) + x_3 & \text{si } x_1 \geq x_2 \\ \uparrow & \text{si } x_1 < x_2 \end{cases}$$

est récursive.