T.D. 1

Programmes avec branchements

Rappels liminaires

1) Si p est un entier naturel, on note $\mathcal{F}_p$ l'ensemble des fonctions partielles de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$.

2) Pour écrire des programmes du langage $\mathcal{S}$ on utilise :

– des variables :

1. les variables d'entrées : $X_1, X_2, X_3, \ldots$
2. la variable de sortie : Y
3. les variables auxiliaires : $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$

– des étiquettes : $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, A_2, \ldots$

3) Une instruction est une action possiblement etiquetée :

$$\begin{array}{lll} V \leftarrow V+1 & [L'] & V \leftarrow V+1 \\ V \leftarrow V-1 & [L'] & V \leftarrow V-1 \\ \text{IF } V \neq 0 \text{ GOTO } L & [L'] & \text{IF } V \neq 0 \text{ GOTO } L \end{array}$$

où V est une variable, L et L' sont des étiquettes.

Exercice 1

1) Écrire un programme de $\mathcal{S}$ (sans macro !) qui calcule la fonction $f(x) = 3x$.

2) Écrire un (pseudo-)programme qui calcule la fonction $f(x) = 3x$ en n'utilisant pas d'autres macros que le branchement inconditionnel (GOTO L) et l'affectation ($V \leftarrow V'$).

3) Écrire le programme de la question 2 sans macro (remplacer les macros utilisées par leur expansion). Que peut-on remarquer ?

Exercice 2

1) Écrire un (pseudo-)programme qui calcule la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

en n'utilisant pas d'autres macros que le branchement inconditionnel (GOTO L) et l'affectation ($V \leftarrow V'$).
La fonction f est-elle calculable? Est-elle totale?

2) Écrire un (pseudo-)programme qui calcule la fonction g définie par

$$g(x) \begin{cases} = 1 & \text{si } x \text{ est pair} \\ \uparrow & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

en n'utilisant pas d'autres macros que le branchement inconditionnel (GOTO L) et l'affectation ($V \leftarrow V'$).
La fonction g est-elle calculable? Est-elle totale?

Exercice 3

Écrire un programme de $\mathcal{S}$ (sans macro!) qui calcule la fonction $f \in \mathcal{F}_2$ définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

Exercice 4

1) On appelle $\mathcal{P}$ le programme de $\mathcal{S}$ suivant :

$$\begin{array}{ll} [B] & \text{IF } X \neq 0 \text{ GOTO } A \\ & Z \leftarrow Z + 1 \\ & \text{IF } Z \neq 0 \text{ GOTO } B \end{array}$$

Quelle est la fonction $\psi_{\mathcal{P}}^{(1)}$?

2) On appelle $\mathcal{P}$ le programme de $\mathcal{S}$ suivant :

$$
\begin{array}{ll}
 & Y \leftarrow X_1 \\
 & Z \leftarrow X_2 \\
[C] & \text{IF } Z \neq 0 \text{ GOTO } A \\
 & \text{GOTO } E \\
[A] & \text{IF } Y \neq 0 \text{ GOTO } B \\
 & \text{GOTO } A \\
[B] & Y \leftarrow Y - 1 \\
 & Z \leftarrow Z - 1 \\
 & \text{GOTO } C
\end{array}
$$

Quelle est la fonction $\psi_{\mathcal{P}}^{(2)}$?

Exercice 5

Soit $\mathcal{S}'$ le langage de programmes défini comme $\mathcal{S}$ à l'exception des trois instructions "de base" qui deviennent

$$
\begin{array}{l}
V \leftarrow V' \\
V \leftarrow V + 1 \\
\text{IF } V \neq V' \text{ GOTO } L
\end{array}
$$

Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ ont le même pouvoir de calcul.

Exercice 6

Soit π une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que si π est calculable, alors la réciproque π^{-1} est calculable.