DEUG MIAS2. Institut Galilée
Option : Langages formels et compilation. 1999–2000
TD : Feuille 3.

AF déterministes et complets (AFDC).

Soit $\mathbf{A}$ un AF sur un alphabet Vt de terminaux (cf. TD : feuille 2) : on dit que $u \in Vt^*$ est reconnu par $\mathbf{A}$ ssi u définit un chemin qui part de l'entrée de $\mathbf{A}$ et aboutit à l'une de ses sorties. On désigne par $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ le langage constitué par l'ensemble de ces mots et on l'appelle le *langage engendré par* $\mathbf{A}$.

Une analyse lexicale simule le parcours que définit un mot dans un AF à partir de l'entrée de celui–ci. La procédure principale d'une analyse lexicale se présente donc schématiquement de la façon suivante :

```
begin
    ...
    st := entree ;                                    /* entrée de l'AF */
    ...
    while not eof do begin
        c := lire_caractere( ) ;     /* lecture du caractère suivant
        ...*/
        ...                                 /*... du mot à analyser */
        st := transition( st, c ) ;         /* passage de st à st•c */
        if st in sorties then action( )       /* on a reconnu un mot
        ...*/
                               /*... on peut donc agir en conséquence */
        else
        ...                   /* continuer ou constater une <<erreur>>*/
    end ;
    ...
end .
```

La fonction `transition`, telle qu'elle est utilisée ici, suppose que pour tout état q de $\mathbf{A}$ et tout $x \in Vt$, $q \bullet x$ comporte exactement un élément ; un AF qui vérifie cette propriété est dit *déterministe* (au plus un élément) et *complet* (au moins un élément) : en abrégé on parlera d'un AFDC (sur Vt). Pour utiliser le schéma de programme ci–dessus, il est donc intéressant de savoir transformer un AF $\mathbf{A}$ en un AFDC qui engendre le même langage que $\mathbf{A}$.

AFDC associé à un AF.
Soit $\mathbf{A} = (Q, q_0, \mathcal{F}, \bullet)$ un AF sur l'alphabet Vt.
Alors, on construit les éléments de l'AFDC $\mathbf{B} = (R, U_0, \mathcal{G}, \circ)$ de la façon suivante :

- $R = \mathcal{P}(Q)$: les nouveaux états sont des ensembles d'anciens états,
- $U_0 = \{q_0\}$: la nouvelle entrée est le singleton défini par l'ancienne entrée,
- $\mathcal{G}$: un nouvel état est une sortie ssi il contient une ancienne sortie, c'est–à–dire :
$$U \in \mathcal{G} \text{ ssi } U \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$$
- $U \circ x$: pour tout $U \in R$ et tout $x \in Vt$, $U \circ x \in R$ est la réunion des

ensembles $q \bullet x$ lorsque q parcourt U, c'est–à–dire :
pour tout $r \in Q$ *:*

$$r \in U \circ x \text{ ssi il existe } q \in U \text{ tel que } r \in q \bullet x.$$

L'AF **B** est déterministe et complet par construction : l'objet de l'exercice est de comprendre cette construction et de vérifier que l'on a bien $\mathcal{L}(\mathbf{B}) = \mathcal{L}(\mathbf{A})$.

Question a) Vérifier que la table de droite ci–dessous est bien celle de l'AFDC $\mathcal{L}(\mathbf{B})$ associé à l'AF $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ défini par celle de gauche.

e/s	q	$q \bullet a$	$q \bullet b$
$\leftrightarrow$	S	S, A	B
$\leftarrow$	A	A	B
	B	$\emptyset$	A, B

e/s	U	$U \circ a$	$U \circ b$
$\leftrightarrow$	$U_0 = \{S\}$	U_1	U_2
$\leftarrow$	$U_1 = \{S, A\}$	U_1	U_2
	$U_2 = \{B\}$	$\emptyset$	U_3
$\leftarrow$	$U_3 = \{A, B\}$	U_4	U_3
$\leftarrow$	$U_4 = \{A\}$	U_4	U_2
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

• Il faut remarquer que, dans la table de **B**, $\{S, B\}$ ni $\{S, A, B\}$ n'ont été retenus : en fait, ces états n'étant pas accessibles à partir de l'entrée, ils ne jouent aucun rle dans la reconnaissance d'un mot et peuvent donc être négligés sans dommage !

• L'état vide $\emptyset$ est une impasse dont on ne peut jamais s'échapper : cet état correspond donc toujours à une ¡¡erreur¿¿ (c'est–à–dire qu'un mot qui y conduit n'est pas reconnaissable par l'AF).

Question b) Pour chacun des deux mots $u = a^3 = aaa$ et $v = a^2b^4 = aabbbb$, mettre en correspondance

- tous les chemins dans **A** qu'ils définissent en partant de l'entrée,
- idem, dans **B**.

Ce que vous venez d'observer est–il vrai pour tous les mots ?

Question c) Appliquer la construction à l'AF défini par la table ci–contre et refaire l'expérience de la question précédente, avec des mots de votre choix.

e/s	q	$q \bullet a$	$q \bullet b$
$\leftrightarrow$	S	A, D	$\emptyset$
	A	S, B, D	A, C
$\leftarrow$	B	A	B, C
	C	B, C	A
$\leftarrow$	D	$\emptyset$	A

Question d) Vérifier que, pour tout AF **A**, l'AFDC associé **B** est tel que

$$\mathcal{L}(\mathbf{B}) = \mathcal{L}(\mathbf{A}).$$