Grammaires. Nous considérons les grammaires régulières $G = (Vn, Vt, P, S)$ dont les productions sont de la forme $X \to xY$ pour $x \in Vt$ et $X \to \varepsilon$ (où ε est le mot vide).

Automates finis (AF). Un automate fini $\mathbf{A} = (Q, q_0, \mathcal{F}, \bullet)$ sur l'alphabet Vt est la donnée des éléments suivants :

- Q : un ensemble fini (l'ensemble des états),
- $q_0 \in Q$: entrée de l'automate ou, état initial,
- $\mathcal{F} \subseteq Q$: sorties de l'automate ou, états terminaux,
- pour tout $q \in Q$ et tout $x \in Vt$: $q \bullet x \subseteq Q$.

Un AF se présente généralement sous la forme d'une table (voir ci–dessous) mais, sa représentation sous la forme d'un graphe orienté sera encore plus suggestive :

- à chacun des états correspond un nœud du graphe,
- à chaque $r \in q \bullet x$ correspond une arête $q \xrightarrow{x} r$,
- l'entrée est désignée par une flèche entrante,
- chaque sortie est désignée par une flèche sortante.

(Il est commode de pouvoir coller plusieurs étiquettes sur la même arête!).

Exercice 1.

Le tableau ci–contre définit une correspondance entre les grammaires et les AF : le but de cet exercice est d'illustrer cette correspondance par des exemples simples.

Grammaire	AF
Vn	Q
Axiome	Entrée
$X \to xY$	$Y \in X \bullet x$
$X \to \varepsilon$	$X \in \mathcal{F}$

Question a) Construire l'AF correspondant à la grammaire dont les productions sont :

$S \to aS \quad S \to aA \quad S \to bB \quad S \to \varepsilon$
$A \to aA \quad A \to bS \quad A \to \varepsilon$
$B \to bA \quad B \to bB$

et dont S est l'axiome. Dessiner le graphe représentant l'AF obtenu.

Question b) Définir la grammaire correspondant à l'AF dont les éléments sont décrits dans la table ci–dessous.

e/s	q	$q \bullet a$	$q \bullet b$
$\leftrightarrow$	S	A, D	$\emptyset$
	A	S, B, D	A, C
$\leftarrow$	B	A	B, C
	C	B, C	A
$\leftarrow$	D	$\emptyset$	A

Question c) Vérifier que, pour tout $u \in Vt^*$, chaque arbre de dérivation de u dans G définit un chemin dans **A** qui part de l'entrée, aboutit à une sortie et dont les étiquettes des arêtes successives forment le mot u, et réciproquement.

On pourra s'appuyer sur les exemples précédents.

Remarque. Si on se reporte à l'automate ¡¡à ruban¿¿ considéré dans le cours, on constate facilement que :

- $Y \in X \bullet x$ correspond à la transition $(x, X) \to Y$,
- $X \in \mathcal{F}$ correspond à la transition $(B, X) \to S$ où S est l'axiome de la grammaire et B une cellule ¡¡blanche¿¿ du ruban.
- Le parcours d'un chemin qui va de l'entrée jusqu'à une sortie de l'AF correspond à la lecture d'un mot par l'automate ¡¡à ruban¿¿.

Exercice 2.

Montrer que si $L \subseteq Vt^*$ est un langage régulier (c'est–à–dire si $L = \mathcal{L}(G)$ pour une grammaire comme ci–dessus) alors :

il existe un entier naturel $N > 0$ tel que, pour tout $u \in L$ vérifiant $|u| \geq N$, on ait trois mots u_1, u_2 et v satisfaisant les conditions :

1) $u = u_1 v u_2$
2) $|v| \neq 0$,
3) pour tout entier naturel i : $u_1 v^i u_2 \in L$.

Indication. Une dérivation assez longue utilise nécessairement au moins deux fois le même non terminal (ou bien : un chemin assez long dans un AF passe nécessairement deux fois au même endroit !).

Application. Montrer que $L = \{a^m b^m \mid m \geq 0\}$ **n'est pas** un langage régulier. (On raisonnera par l'absurde !)