$\mathcal{A}$ désigne un alphabet quelconque.

Ensemble des mots sur $\mathcal{A}$.

On utilisera la définition suivante (*construction des mots à partir du mot vide par adjonctions d'une lettre à droite*) :

> *l'ensemble $\mathcal{A}^*$ des mots sur $\mathcal{A}$* est le plus petit ensemble tel que :
> (i) $\varepsilon \in \mathcal{A}^*$, où ε désigne *le mot vide*.
> (ii) pour tout $u \in \mathcal{A}^*$ et tout $x \in \mathcal{A}$, $ux \in \mathcal{A}^*$.

Exercice 1.

La concaténation peut se définir par récurrence de la façon suivante :

(i) $u \cdot \varepsilon = u$ pour tout $u \in \mathcal{A}^*$
(ii) $u \cdot (vx) = (u \cdot v)x$ pour tout $u \in \mathcal{A}^*$, tout $v \in \mathcal{A}^*$ et tout $x \in \mathcal{A}$

On appliquera cette définition pour les questions suivantes.

Question a) Calculer $u \cdot v$ pour $u = abab$ et $v = aabb$.

Question b) Montrer que l'on a $\varepsilon \cdot u = u$ et $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$ quels que soient les mots u, v et w.

Question c) La *longueur* $|u|$ de $u \in \mathcal{A}^*$ peut se définir par récurrence de la façon suivante :

(i) $|\varepsilon| = 0$.
(ii) $|ux| = |u| + 1$ pour tout $u \in \mathcal{A}^*$ et tout $x \in \mathcal{A}$.

Vérifier que $|u \cdot v| = |u| + |v|$.

Question d) Définir le *nombre d'occurrences* $|u|_a$ de $a \in \mathcal{A}$ dans $u \in \mathcal{A}^*$ et vérifier que $|u \cdot v|_a = |u|_a + |v|_a$.

Dans l'avenir, on notera simplement uv pour $u \cdot v$.

Degré d'ambiguïté d'un mot dans une grammaire.

Soient $G = (Vt, Vn, R, S)$ une grammaire et $u \in Vt^*$.

Le degré d'ambiguïté $Amb_G(u)$ de u dans G est le nombre d'arbres de dérivation de u (deux à deux distincts). On notera en particulier que :

$$Amb_G(u) \neq 0 \text{ si et seulement si } u \in \mathcal{L}(G)$$

Exercice 2.

On considère la grammaire G pour laquelle $Vt = \{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$, $Vn = \{S\}$ et R est l'ensemble des productions :

$$\begin{aligned} 1 &: S \to \mathbf{a}S \\ 2 &: S \to \mathbf{a}S\mathbf{a} \\ 3 &: S \to \mathbf{c} \end{aligned}$$

Question a) Montrer que $\mathcal{L}(G) = \{\mathbf{a}^m\mathbf{c}\mathbf{a}^n \mid 0 \leq n \leq m\}$.

Question b) Calculer $A(m,n) = Amb_G(\mathbf{a}^m\mathbf{c}\mathbf{a}^n)$ pour tous les couples d'entiers tels que $0 \leq n \leq m$. (Indication : l'observation de la production qui s'applique à la racine d'un arbre de dérivation permet de faire un raisonnement par récurrence.)

Exercice 3.

On considère la grammaire G pour laquelle $Vt = \{+, \times, |\}$, $Vn = \{S, T\}$ et R est l'ensemble des productions :

$$\begin{array}{ll}
1 : S \to S \times S & 4 : T \to |T \\
2 : S \to S + S & 5 : T \to | \\
3 : S \to T &
\end{array}$$

Question a) Montrer que $u = || \times ||| + |$ admet au moins deux arbres de dérivation différents dans G.

Question b) Nous voulons associer un «calcul» à chaque arbre de dérivation A d'un mot $u \in Vt^*$. Pour cela, on distingue chaque occurrence de S et de T qui s'y trouve par un indice qui lui est propre.
Montrer comment on peut alors attribuer une valeur entière à u en appliquant en chaque nœud de A la relation appropriée ci–dessous (les indices prennent la valeur qu'ils ont dans A) :

$$\begin{array}{ll}
1 : S_i \to S_j \times S_k & \{val(S_i) = val(S_j) \times val(S_k)\} \\
2 : S_i \to S_j + S_k & \{val(S_i) = val(S_j) + val(S_k)\} \\
3 : S_i \to T_j & \{val(S_i) = val(T_j)\} \\
4 : T_i \to |T_j & \{val(T_i) = 1 + val(T_j)\} \\
5 : T_i \to | & \{val(T_i) = 1\}
\end{array}$$

Calculer la valeur ainsi attribuée à $u = || \times ||| + |$ par deux arbres de dérivation distincts.

* **Question c)** Soit $bin(u)$ le nombre d'occurrences de $\times$ et $+$ dans u et soit $D(u)$ l'ensemble des couples de mots défini par :

$$(u_1, u_2) \in D(u) \text{ ssi } \text{“}u = u_1 \times u_2 \text{ ou } u = u_1 + u_2\text{”}$$

On définit alors la fonction F à valeur entière. Pour tout $u \in Vt^*$, on a :

Si $u = \varepsilon$,
  Alors $F(u) = 0$
  Sinon si $bin(u) = 0$
    alors $F(u) = 1$
    sinon $F(u) = \displaystyle\sum_{(u_1,u_2) \in D(u)} F(u_1)F(u_2)$

Par exemple, on a :

$$D(|| \times | + |) = \{(||, | + |), (|| \times |, |)\} \text{ et } D(\times || + |) = \{(\varepsilon, || + |), (\times ||, |)\}.$$

Montrer que $F(u) = Amb_G(u)$ pour tout $u \in Vt^*$.