Résumé. Le dual topologique de l'espace des séries en un nombre quelconque, éventuellement infini, de variables non commutatives avec un corps topologique séparé de coefficients, pour la topologie produit, n'est autre que l'espace des polynômes. Il en résulte de façon immédiate que les endomorphismes continus sur les séries sont exactement les matrices infinies mais finies en ligne. Les matrices triangulaires infinies, puisque formant une algèbre de Fréchet, disposent quant à elles d'un calcul intégral et différentiel, que nous développons dans un cadre assez général, et qui permet d'établir une correspondance exponentielle-logarithme de type Lie. Nous déployons ces outils sur l'algèbre de Weyl (à deux générateurs) réalisée fidèlement comme une algèbre d'opérateurs agissant continûment sur l'espace des séries formelles (en une variable). Puis nous démontrons que chaque endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable peut s'obtenir explicitement sous la forme de la somme d'une famille sommable en des opérateurs plus élémentaires, les opérateur d'échelle (généralisation de l'algèbre de Weyl), précisant de la sorte le théorème de densité de Jacobson. Par dualité (topologique) un résultat similaire concernant les opérateurs continus sur un espace de combinaisons linéaires infinies tombent presque gratuitement. Par ailleurs nous développons la notion d'algèbre (contractée) large d'un monoïde à zéro (obtenue par complétion de l'algèbre contractée) qui nous permet de calculer de nouvelles formules d'inversion de Möbius ainsi que des séries de Hilbert.

Mots-clefs. Algèbre de Fréchet, matrice infinie, dual topologique, topologie initiale, sommabilité, algèbre de Weyl, monoïde à zéro, algèbre contractée, opérateur d'échelle.

Abstract. The topological dual of the space of formal series with any number, even infinite, of noncommutative variables over an Hausdorff topological field, under the product topology, is the space of polynomials. It implies that continuous endomorphisms on series are exactly the infinite but row-finite matrices. Because their totality is a Fréchet algebra, a basic integral and differential calculus can be defined for intinite triangular matrices ; such a calculus is futhermore developped in a general way and leads to an exponential-logarithm Lie-like correspondence. These analytic tools are then successfully applied on the first Weyl algebra faithfully represented as an algebra of continuous operators on the space of formal power series (in one variable). Afterwards we prove that every endomorphism of an infinite (countable) dimensional vector space may be explicitly obtained as the sum of a summable family of elementary operators, called ladder operators (generalizing the Weyl algebra) in a way similar to Jacobson's density theorem. By (topological) duality we obtain the same result for continuous operators on a space of infinite linear combinations. Besides we introduce the total (contracted) algebra of a monoid with a zero (as a completion of the usual contracted algebra) which is used to compute new Mœbius inversion formulæ along with some Hilbert series.

Keywords. Fréchet algebra, infinite matrix, topological dual, initial topology, summability, Weyl algebra, monoid with a zero, contracted algebra, ladder operator.