Proposition d'encadrement d'une thèse (2011-2014)

Thématique : Algorithmique & Combinatoire

Laboratoire : Laboratoire d'Informatique de Paris-Nord (LIPN, UMR CNRS 7030).
Institut *Galilée*, Université Paris 13.
99, avenue Jean-Baptiste Clément 91430 Villetaneuse. France.

Équipe : *Combinatoire, algorithmique et interactions* (CALIN).

Nom et adresse électronique des directeur de travaux :
Christian Lavault (professeur). E-mail : Christian.Lavault@lipn.univ-paris13.fr
Hoang.Ngoc Minh (professeur). E-mail : Hoang.Ngocminh@lipn.univ-paris13.fr

Nom et adresse électronique du directeur du laboratoire :
Christophe Fouqueré. E-mail : Christophe.Fouquere@lipn.univ-paris13.fr

Titre : *Étude des fonctions zêta d'Hihara-Selberg, l'hypothèse de Riemann pour les graphes, surfaces et variétés*

Présentation générale

L'étude d'un graphe fini non orienté G conduit souvent à considérer les chemins fermés qu'il contient. Ce projet s'intéresse plus particulièrement aux cycles élémentaires de G et, parmi eux, à ses géodésiques fermées, c'est-à-dire aux chemins fermés sans retour immédiat sur un sommet après juste un pas de marche, pour n'importe quel point de départ pris dans le cycle.

On note γ^r la géodésique fermée obtenues en répétant r fois γ. Par suite, une géodésique fermée qui n'est puissance d'aucune autre est dite *géodésique primitive* et la classe d'équivalence des géodésiques primitives joue un rôle analogue à celui des nombres premiers en arithmétique. Ainsi, le dénombrement des géodésiques primitives de longueur donnée s'avère très semblable au théorème des nombres premiers classique. La fonction zêta d'Ihara, analogue de la fonction zêta de Riemann, permet d'étudier ces « premiers » et débouche sur l'« hypothèse de Riemann » en théorie des graphes.

Objectifs

Les problèmes liés à la fonctions zêta d'Hihara et le théorème d'Ihara sont délicats, car ils font appel à des outils mathématiques non triviaux d'algèbre et d'analyse. En revanche, l'analogie entre ces objets combinatoires et les nombres premiers permet de tracer un cadre d'étude théorique et pratique simple.

Après un bref retour sur la théorie des nombres, le théorème des géodésiques primitives de graphes – analogue du théorème des nombres premiers – et quelques propriétés importantes induites par ce théorème, on généralisera ce résultat dans plusieurs directions complémentaires. Primo, en démontrant le lien existant entre les graphes de Ramanujan (au sens de Lubotzky, Phillips et Sarnak) et l'hypothèses de Riemann pour la fonction zêta d'Ihara. Secundo, en menant une étude globale du comportement des cycles dans un graphe, conduisant à leur recouvrement par sommets avec des analogues au théorème de densité de Tchebotarev. Tertio, en reprenant la problématique de l'hypothèses de Riemann pour la fonction zêta de Selberg, dans le cadre de surfaces de Riemann de courbure négative, puis dans des cadres plus généraux de surfaces et de variétés adéquates.

Dans le cours de la thèse on s'attachera à mener à bien la simulation des principaux résultats obtenus et à concrétiser leurs applications à différentes classes de graphe : les graphes de Ramanujan, qui jouent ici un rôle combinatoire important, les graphes de Petersen et, plus généralement, les graphes finis réguliers, avec des applications à l'algorithmique des réseaux de communication, etc.

Remarques De bonnes connaissances en analyse classique et en mathématiques discrète sont nécessaires pour entreprendre ce travail.
Par ailleurs, la simulation suppose également une bonne connaissance et une certaine maîtrise dans la manipulation d'un logiciel de calcul formel tel que Maple, qui programme de manière souple les stuctures combinatoires et les objets mathématiques à étudier.