Combinatoire analytique des chemins et des cartes

Cyril Banderier

Thèse de l'Université de Paris VI
Discipline : informatique

(version du 1 juillet 2001)

Thèse soutenue le lundi 25 juin 2001.

Directeur :
M. Philippe Flajolet, directeur de recherche à l'INRIA-Rocquencourt

Rapporteurs :
M. Dominique Gouyou-Beauchamps, professeur à l'université de Paris-Sud
M. Guy Louchard, professeur à l'université libre de Bruxelles
M. Renzo Pinzani, professeur à l'université de Florence

Présidente du Jury :
Mme Michèle Soria, professeur à l'université de Paris VI

Jury :
Mme Mireille Bousquet-Mélou, chargée de recherche CNRS à Bordeaux
Mme Brigitte Chauvin, professeur à l'université de Versailles
Mme Brigitte Vallée, professeur à l'université de Caen

Table des matières

Résumé

Cette thèse étudie, d'une part, divers modèles combinatoires et probabilistes de marches sur les entiers et, d'autre part, la multi-connectivité dans les cartes planaires. Nous montrons comment expliciter les séries génératrices sous-jacentes et comment en déduire l'asymptotique des dénombrements ainsi que les lois limites de divers paramètres.

Les marches aléatoires que nous considérons sont de trois types :
(i) des marches sur les entiers homogènes en temps et en espace (une généralisation des chemins de Dyck),
(ii) des marches sur les entiers non homogènes en espace (un ensemble infini de règles de récriture sur les entiers qui correspond à une classe d'arbres étiquetés utilisée pour faire de la génération aléatoire uniforme),
(iii) des marches colorant aléatoirement les sommets d'un graphe fini (généralisation du problème du collectionneur de coupons).

L'asymptotique du dénombrement et de différents paramètres (*e.g.* altitude finale, passages par zéro) sont alors établies pour ces classes de marches.

Les cartes planaires sont une projection dans le plan de graphes dessinés sur la sphère. Nous montrerons en quoi des méthodes de cols coalescents permettent de préciser le phénomène de « transition de phase » qui survient lorsque l'on s'intéresse à la taille de la plus grande composante multi-connexe d'une carte aléatoire.

Au-delà de ces perspectives mathématiques, la quantification de l'aléa dans ces deux structures combinatoires de base (que sont les chemins et les cartes) joue un rôle clef en informatique théorique soit pour l'étude et/ou la représentation de structures de données, soit comme modèles pertinents de la complexité de nombreux algorithmes. Ce travail dégage aussi l'intérêt intrinsèque d'une méthode de résolution de certaines équations fonctionnelles (la méthode du noyau) et d'une méthode de cols coalescents aboutissant à des lois limites non gaussiennes (*e.g.* la loi d'Airy des cartes), susceptibles de nombreuses applications.

Mots-clefs : combinatoire analytique, chemins, cartes, graphes, méthode du noyau, théorie des langages, analyse de singularité, méthode de col, cols coalescents, loi limite, multi-connectivité, loi d'Airy, génération aléatoire.

Summary

This thesis is dedicated to the study of several combinatorial-asymptotics models of lattice paths (in particular, walks on the nonnegative integers) and of multi-connectivity in planar maps. We show how to make explicit the underlying generating functions and how to deduce enumeration, asymptotic estimates, as well as limit laws of several parameters.

The random walks under consideration are of three types:
(i) walks over the integers that are time and space homogeneous (a generalisation of Dyck paths);
(ii) walks over the integers that are not homogenous in space (given by an infinite set of rewriting rules over the integers which correspond to a class of trees used for uniform random generation);
(iii) walks colouring randomly vertices of a finite graph (a generalisation of the coupon collector problem).

Asymptotic estimates for enumeration and various parameters (*e.g.* final altitude, number of returns to zero) are established for such classes of walks.

Planar maps are graphs drawn on the plane. We show how coalescing saddle points methods allow us to clarify the "phase-transition" phenomena which appear when one considers the largest multi-connected component of a random map.

This thesis quantifies randomness in these two basic types of combinatorial structures, namely maps and paths, which play a key rôle in theoretical computer science, eitheir in relation to data structures or as relevant models for the complexity of numerous algorithms. This work brings out the intrinsic interest of a method for resolving certain functional equations (the kernel method) and a method of coalescing saddle points leading to non Gaussian limit laws (*e.g.* a "map-Airy" law), for which we otherwise expect numerous applications.

Keywords: analytic combinatorics, lattice paths, kernel method, formal langages theory Markov chain, planar maps, singularity analysis, (coalescing) saddle points method, multi-connectivity in graphs, Airy limit law, random generation.

Introduction

En 1962, Donald Ervin Knuth s'attaquait à sa première analyse d'algorithme (il s'agissait de l'analyse du coût d'une méthode de hachage avec essais linéaires). Par la suite, ses monographies sur « l'art de la programmation sur ordinateur » fondèrent pleinement une discipline aujourd'hui fondamentale, l'*analyse d'algorithmes*.

Dès le début, cette discipline fut à la confluence des mathématiques, de l'informatique théorique et de la programmation. Il s'agissait d'étudier des structures issues du monde informatique (*i.e.* du monde discret), et de quantifier certains comportements, de dénombrer des cas de figures, etc. Cela provoqua un renouveau d'intérêt pour une jolie discipline des mathématiques, la combinatoire, qui avait un peu été délaissée depuis un siècle, bien que largement fondée par un mathématicien prestigieux, à savoir, Euler.

Durant ces quarante dernières années, de grandes avancées ont été faites dans notre compréhension de l'univers combinatoire, et de son miroir analytique, dans lequel vivent de multiples identités, fort esthétiques. Leur beauté s'avère souvent liée à une interprétation combinatoire ; pensons aux nombreuses formules de Ramanujan, qui est le principal représentant de la discipline à la suite d'Euler et dont les identités retrouvèrent une nouvelle jeunesse avec l'avènement de l'ordinateur.

L'informatique et ses nombreuses structures récursives (mots, permutations, arbres, listes, piles, graphes...) est un véritable nid de problèmes combinatoires, qui mènent de façon naturelle à des récurrences, dont la résolution (dénombrement, asymptotique) passe par des techniques d'analyse complexe (essentiellement celle de Cauchy !). Depuis 20 ans, de nombreux auteurs ont ainsi étudié de façon assez systématique le comportement de diverses *structures combinatoires* avec des méthodes analytiques. Je m'inscris donc en tant que fils naturel de cette école de la *combinatoire analytique*, et j'étudierai ici deux structures combinatoires qui surgissent naturellement dans de nombreux algorithmes : les chemins et les graphes.

Plus précisément, cette thèse a pour thème le dénombrement et l'étude asymptotique des marches aléatoires (avec contraintes de bord) d'une part et des cartes planaires (avec contraintes de connectivité) d'autre part. Les techniques sont celles de la combinatoire analytique, c'est-à-dire que l'énumération se fait par le biais de séries génératrices (des séries formelles),

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n ,$$

où f_n désigne le nombre d'objets de taille n. La technique des séries génératrices a été introduite par Euler en 1753 (pour un dénombrement menant aux nombres de Catalan) ; une fois que nous conférons à ces séries un sens analytique, elles permettent de faire de l'asymptotique

que ce soit par de l'**analyse de singularités** [1] ou par des **méthodes de points cols**. Dans les deux cas, un certain nombre de vérifications techniques doivent être faites afin d'obtenir l'asymptotique (la « condition camembert » pour l'analyse de singularité, la « condition de concentration » autour du point col pour les méthodes de cols). Notons au passage que la difficulté vient souvent de ce qu'une fonction a plusieurs singularités (ou cols) alors que l'on aimerait faire de l'analyse de singularité (sans « s ») ou de la méthode de col (sans « s ») !

Nous appliquons ces deux méthodes à des **fonctions algébriques**, qui sont la principale classe de fonctions présentes dans cette thèse. Pourquoi les fonctions algébriques ont-elles ici un rôle clef ? Une première réponse, combinatoire, est liée à ce que l'on appelle la **méthodologie de Schützenberger** : les objets que nous considérons ont une structure récursive qui permet de les engendrer par une grammaire ; or il est aujourd'hui bien connu qu'une telle grammaire se traduit dans le monde des séries formelles en une équation fonctionnelle algébrique. Une deuxième réponse, plus algébrique, est liée au fait que l'on peut « explicitement » résoudre les équations fonctionnelles (obtenues cette fois via diverses récurrences et non plus par des décompositions combinatoires directes qui restent parfois plus difficile à trouver) : la résolution repose sur **méthode du noyau** pour les marches et sur la **méthode quadratique** pour les cartes. C'est cette réponse que je vais grandement développer dans cette thèse.

Chapitre premier.

Ce chapitre est un chapitre d'introduction qui reprend certains résultats originaux de mon mémoire de DEA [**4**] ; j'y démontre comment expliciter les séries génératrices de marches sur les entiers. Depuis la fin du XIXème siècle, certaines de ces marches ont été intensément étudiées en combinatoire énumérative [**36, 98, 99**] et font partie des objets combinatoires les plus cités : chemins de Dyck, chemins de Motzkin, chemins de Schröder... D. André avait le premier étudié des contraintes de positivité (problème du scrutin) et avait montré une formule binomiale exacte grâce à un principe de réflexion, qui porte désormais son nom. À la fin du XIX^e siècle, divers auteurs, proches des mathématiques récréatives, ont ainsi étudié ce qu'ils ont appelé « les problèmes de l'échiquier » : combien de suites de n mouvements sont-elles envisageables pour aller d'un point A à un point B sur un échiquier, avec une pièce donnée. L'une des énumération les plus célèbres (le déplacement du roi) donne les nombres de Delannoy [**42**].

De telles marches modélisent de façon naturelle divers phénomènes en hydrographie (évolution du niveau d'un cours d'eau), en économie (évolution du cours d'une action), en

[1]L'analyse de singularités repose sur une équivalence directe entre le développement local de la fonction en sa singularité dominante et la croissance polynomiale de ses coefficients :

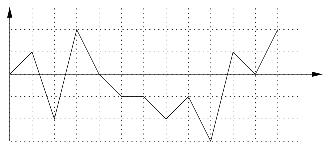
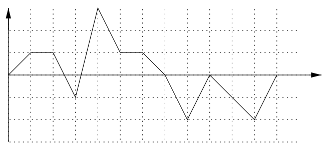
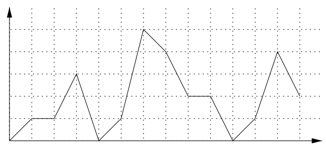
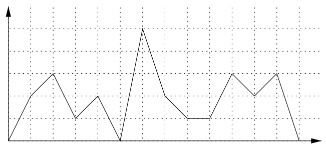
$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n = (1-z/\rho)^\alpha \Longrightarrow f_n \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\,\frac{\rho^{-n}}{n^{\alpha+1}}\,,$$

tandis que les méthodes de cols reposent sur une représentation intégrale des coefficients (due à Cauchy), puis sur une estimation asymptotique de cette intégrale (variation de la méthode de Laplace) :

$$f_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{F(z)}{z^{n+1}}dz \Longrightarrow f_n \sim \frac{1}{\Gamma(\beta)}\,\frac{\rho^{-n}}{n^\beta}\,.$$

informatique (évolution d'une pile, parcours d'arbre) et plus généralement tout phénomène qui est codé comme une somme de variables aléatoires indépendantes. Les incréments peuvent être ± 1 (c'est le cas le plus simple, celui des chemins de Dyck). Le cas des incréments (*i.e.*, les « sauts » de la marche) à valeur dans $-1, 0, +1$ (chemins de Motzkin) a également une combinatoire simple et élégante, reliée à des fonctions quadratiques. Le cas où les incréments sont dans $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ correspond aux marches de Lukasiewicz, qui jouent un rôle fondamental car elles sont en bijection avec des familles simples d'arbres. J'étudie plus généralement dans ce chapitre les marches dont les sauts (les incréments) sont à valeur dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$.

Ce chapitre peut essentiellement être résumé par le tableau suivant, qui montre à la fois les objets combinatoires en jeu et les séries génératrices associées :

marches	finissant n'importe où	finissant en 0
sans contrainte de positivité	 $\mathbb{Z}$-chemin (marche) $F_{\mathbb{Z}}(z) = \frac{1}{1-zP(1)}$	 $\mathbb{Z}$-excursion (pont) $F_{\mathbb{Z},0}(z) = z \sum_{i=1}^{c} \frac{u_i'(z)}{u_i(z)}$
avec contrainte de positivité	 $\mathbb{N}$-chemin (méandre) $F_{\mathbb{N}}(z) = \frac{1}{1-zP(1)} \prod_{i=1}^{c} (1-u_i(z))$	 $\mathbb{N}$-excursion (excursion) $F_{\mathbb{N},0}(z) = \frac{(-1)^{c+1}}{p_{-c}} \prod_{i=1}^{c} u_i(z)$

J'obtiens les formes closes ci-dessus pour les séries génératrices des marches (dont les sauts appartiennent à un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$) suivant les contraintes (marches sur $\mathbb{N}$ ou marches sur $\mathbb{Z}$). J'ai mis entre parenthèses la terminologie des probabilistes (marche, pont, méandre, excursion).

En combinatoire, les fonctions rationnelles, algébriques et D-finies jouent un rôle prépondérant. Rappelons qu'une fonction est D-finie si l'espace engendré par ses dérivées successives est de dimension finie, ou, de façon équivalente, si la fonction vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux. On voit clairement que cette dernière définition équivaut par ailleurs à ce que les coefficients f_n de la série génératrice $F(z) = \sum_n f_n z^n$ vérifient une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux en n ; ceci signifie que d'un point de vue « informatique » (et notamment pour les logiciels de calcul formel) on peut *manipuler*[2] ces

[2]Plus généralement, pour un opérateur ∂ donné, (*e.g.*, la différenciation finie, la dérivation, ...), l'ensemble des fonctions qui sont annulées par un polynôme $P(\partial)$ en cet opérateur (pensons à une récurrence ou à une équation différentielle comme dans le cas D-fini) et qui vérifient de surcroît une certaine propriété « noethérienne » (qui garantit en fait que les algorithmes lancés sur ces fonctions finiront) forment la classe des fonctions ∂-holonomes. C'est à ce jour l'une des grandes classes de fonctions sur lesquelles on sache, en calcul formel, opérer de façon garantie [**35**].

coefficients et les calculer *rapidement* (en temps $O(\ln n)$ pour les rationnelles et $O(n)$ pour les D-finies). Pour la dérivation (notons D l'opérateur associé), il y a équivalence entre la D-finitude et la D-holonomie, nous emploierons (abusivement) parfois le terme « holonome » pour dire « D-finie ». Le lecteur ne sera pas étonné de croiser, dans tous les chapitres à venir, des fonctions D-finies. Le tableau suivant résume la nature de la série génératrice des marches suivant les contraintes.

marches	finissant n'importe où	finissant en 0
sans contrainte de positivité	$\mathbb{Z}^d$-chemins : rationnelle	$\mathbb{Z}^d$-excursions : D-finie $\mathbb{Z}$-excursions : algébrique (si $d=1$)
avec 1 contrainte de positivité	$\mathbb{N}^d$-chemins : algébrique	$\mathbb{N}^d$-excursions : algébrique
avec ≥ 2 contraintes de positivité	$\mathbb{N}^d$-chemins : D-finie (?)	$\mathbb{N}^d$-excursions : D-finie (?)

Pour les quatre premiers cas, je montre comment obtenir une forme close pour la série génératrice et j'illustre les deux derniers cas par le problème de Pólya et par une marche sur un réseau hexagonal (les points d'interrogation dans le tableau ci-dessus indiquent que je n'ai pas trouvé d'approche générale pour établir la D-finitude de telles marches multidimensionnelles).

Mes principaux résultats sont notamment

- la proposition 3 (p. 24) qui explicite, via un calcul de résidu, l'algébricité de la série génératrice des excursions sur $\mathbb{Z}$;
- le théorème 2 (p. 29) qui explicite, via la méthode du noyau, l'algébricité de la série génératrice des excursions sur $\mathbb{N}$ (= les mots de Dyck généralisés) ;
- le théorème 3 (p. 29) qui explicite, via la méthode du noyau, l'algébricité de la série génératrice des chemins sur $\mathbb{N}$ (= les préfixes des mots de Dyck généralisés) ;
- le théorème 6 (p. 37) qui explicite l'algébricité de la série génératrice trivariée des marches sur $\mathbb{N}$ en comptant les passages par zéros (= les facteurs des mots de Dyck généralisés) ;
- le théorème 8 (p. 38) qui exprime la série génératrice des marches de hauteur bornée à l'aide de quotients de déterminants ;
- le théorème 9 (p. 42) qui explicite l'algébricité de la série génératrice des excursions « dirigées » sur $\mathbb{N}^2$.
- le théorème 10 (p. 46) qui explicite l'algébricité de la série génératrice des chemins diagonaux sur $\mathbb{Z}^2$ (calcul de résultant) ;
- le théorème 11 (p. 49) qui explicite la D-finitude de la série génératrice des excursions sur $\mathbb{Z}^m$.

Tous ces résultats généralisent ainsi les résultats du folklore pour l'instance particulière et fondamentale que constituent les mots de Dyck « classiques ».

Deuxième chapitre.

Le deuxième chapitre est le pendant du premier pour des marches qui ne sont pas homogènes en espace, mais pour lesquelles on peut néanmoins toujours établir l' **algébricité** des séries génératrices correspondantes. Il s'agit d'un modèle qui nous amène à étudier des **grammaires infinies** rationnelles et à résoudre des problèmes jusqu'alors ouverts sur les **arbres de génération** (ou « ECO-systèmes »).

Les principaux résultats de ce chapitre sont

- les théorèmes 1 et 2 (des pages 63 et 65) qui montrent la rationalité de la série génératrice d'un arbre de génération associé à une règle d'étiquetage « linéaire » ;
- le théorème 3 (p. 70) qui explicite, via la méthode du noyau, l'algébricité de la série génératrice d'un arbre de génération associé à une règle d'étiquetage « factorielle » ;
- la proposition 4 (p. 75) qui prouve la transcendance des séries génératrices d'arbres de génération ayant des règles d'étiquetage d'un type donné ;
- les exemples 33, 34, 35 et 36 (pp. 79-80) qui déterminent les séries génératrices transcendantes d'arbres de génération, via des techniques de fractions continuées ;
- certains résultats « surprenants » (qui valent leur pesant de chocolat) comme un arbre de génération ayant l'ensemble des nombres premiers comme étiquettes mais une série génératrice rationnelle (ex. 22, p. 63), et un arbre de génération avec une règle fort simple mais une série génératrice non holonome (ex. 37, p. 80).

Les arbres de génération sont une idée naturelle (surgissant dans [**34**], puis développée par Julian West [**124**] et par la suite étudiée par les écoles florentine [**11, 13, 95, 97, 104**] et bordelaise [**49, 50**]).

Ce chapitre correspond dans sa plus grande partie à l'article « Generating Functions for Generating Trees » , à paraître dans la revue Discrete Mathematics [**6**]. Cette article résulte d'un travail réalisé en collaboration avec Mireille Bousquet-Mélou, Alain Denise, Philippe Flajolet, Danièle Gardy et Dominique Gouyou-Beauchamps, dont des versions préléminaires ont fait l'objet d'un rapport INRIA et d'une présentation au colloque FPSAC [**5**].

Ma contribution majeure se situe dans l'exploitation de la méthode du noyau pour montrer l'algébricité de toute une classe d'arbres de génération (ce qui résout une conjecture de Renzo Pinzani et Elisa Pergola [**106**]), et également quelques apports à des cas rationnels ou encore holonomes/non-holonomes (lien avec les fractions continuées).

Troisième chapitre.

Le troisième chapitre continue à explorer les séries génératrices de marches, mais sur un graphe fini. On s'intéresse notamment à une généralisation du problème du collectionneur de coupons, qui correspond assez à la problématique du jeu « Trivial Pursuit » : combien de temps un joueur met-il à collecter toutes les parts de camembert, d'autant qu'il a du mal à répondre aux questions ?

Le problème du collectionneur de coupons se formule usuellement de la façon suivante : « Un chocolatier accompagne ses tablettes d'une image (parmi une collection de n images). Combien de tablettes de chocolat un client doit-il acheter en moyenne pour avoir la collection complète des images ? » Un point de vue équivalent consiste à imaginer les n images comme n sommets d'un graphe complet (avec boucles), sur lequel le client effectue une marche aléatoire, que l'on arrête quand on est passé par tous les sommets. Dans ce cas précis, le temps moyen est nH_n. Une variante, dite « problème du collectionneur de coupons généralisé » , consiste à répartir les images suivant certaines probabilités $p_1, \dots p_n$ (éventuellement, une des images de la collection peut être bien plus rare que les autres pour inciter les clients à acheter plus de tablettes de chocolat pour finir leur collection). Une formule de type inclusion-exclusion est alors connue [**61**]. Certains auteurs [**73**] se sont même récemment intéressés à l'apparition de nombres hyperharmoniques lorsque l'on cherche à avoir toutes les images en double, question que D. Foata appelle problème du petit frère du collectionneur de coupons.

Nous apportons une réponse à une conjecture du probabiliste Bob Dobrow : « Il y a n convives réunis autour d'une table. L'un des convives a la carafe d'eau et se verse à boire avec une probabilité p, puis passe la carafe à son voisin de droite ou de gauche, celui-ci fait de même, etc. Est-il vrai que le temps moyen $T_n(p)$ pour que tout le monde se soit servi à boire vérifie $pT_n(p) \to nH_n$ quand $p \to 0$? »

Plus généralement, ce chapitre étudie donc le temps de marquage (un temps de couverture pour lequel on marque de surcroît, avec une certaine probabilité, chaque sommet visité) d'une marche aléatoire sur un graphe fini. La difficulté majeure est que, contrairement au cas précédent sur le graphe complet, il s'agit ici d'un problèmes avec des variables *dépendantes* ; toutefois, une bonne partie des résultats du folklore peuvent être étendus.

J'obtiens ainsi une formule générale pour le temps de marquage de n'importe quel graphe (théorème 1, p. 90) ; dans le cas du graphe complet, cette formule se simplifie en une formule de type inclusion-exclusion, liée à la distribution stationnaire (théorème 2, p. 92). Je montre alors (proposition 1, p. 94) qu'un graphe quelconque a asymptotiquement le même temps de marquage qu'un graphe complet « équivalent ». Les constantes en jeu sont très dures à calculer (nombre exponentiel de sommants), toutefois une approximation numérique est aisée, grâce à une forme intégrale pour ce temps moyen (théorème 3, p. 96). Pour finir, je donne (propositions 3 p. 97 et 4 p. 98), une jolie formule pour le temps de marquage des graphes équilibrés, puis des graphes réguliers ($\sim \frac{nH_n}{p}$!), ce qui répond pleinement à la conjecture.

Tous ces résultats généralisent ce qui était connu pour le *temps de couverture*, et on retrouve en particulier les résultats classiques du collectionneur de coupons généralisé [**61**].

Ce chapitre correspond à un article (travail effectué sous l'impulsion de Robert P. Dobrow) présenté à SFCA/FPSAC'00, à Moscou en juin 2000 [**7**].

Quatrième chapitre.

Différents paramètres liés aux marches ont déjà été étudiés par les probabilistes, qui ont obtenus des asymptotiques au « premier ordre » , notamment pour les marches de Lukasiewicz (celles qui ont un seul saut vers l'arrière, d'amplitude -1) qui sont en correspondance avec des familles d'arbres.

Les principaux résultats de ce chapitre sont des **développements asymptotiques complets** (fournis par la combinatoire analytique grâce à nos formules du chapitre 1), non seulement pour les marches de type Łukasiewicz mais pour toutes les marches à sauts bornés, pour

- le nombre de $\mathbb{Z}$-excursions, via une méthode de col (théorème 1, p. 105) ;
- le nombre de $\mathbb{N}$-excursions, via un principe de conjugaison et de l'analyse de singularités (théorème 2, p. 107) ;
- le nombre de $\mathbb{N}$-chemins (théorème 3, p. 112) ;
- le nombre de retours en zéro d'une $\mathbb{N}$-excursion, *i.e* le nombre de facteurs d'un mot de Dyck généralisé et la loi limite correspondante (théorème 4, p. 114) ;
- l'altitude finale d'un $\mathbb{N}$-chemin et la loi limite correspondante (théorème 6, p. 117) ;
- le théorème 7 (p. 119) qui permet de donner l'asymptotique des marches probabilisées avec barrière réfléchissante.

Nous finirons par deux sections un peu plus prospectives sur la hauteur (généralisant les résultats connus pour les arbres) et l'aire (on aboutit alors à des q-**analogues**) des $\mathbb{N}$-excursions.

Pour le nombre asymptotique d'excursions, la démonstration passe par quelques points techniques, liés à l'équation $y^c = z\phi(y)$ (qui généralise le cas déjà connu $y = z\phi(y)$) et dont toute la difficulté passe dans le fait que pour $c > 1$, on est confronté à des séries qui ne sont plus seulement à termes positifs. Finalement, on débouche sur une asymptotique en

$$\frac{A}{\rho^n \sqrt{\pi n^3}}$$

et de nombreuses lois des paramètres de marches résultent de cette caractérisation.

Cinquième chapitre.

Ce chapitre est consacré aux cartes planaires (et à leurs cousins les graphes), auxquels nous appliquons des méthodes de cols pour étudier de façon fine le phénomène de transition de phase pour la multi-connexité (en ajoutant aléatoirement des arêtes à une carte donnée, quand sommes-nous assurés d'avoir une composante k-connexe ?). Nous dégageons le rôle fondamental joué par ce que nous baptisons la **loi d'Airy des cartes**, dont nous montrerons l'universalité au sens où de nombreux problèmes avec **coalescence de points cols** entraînent cette loi.

Ce chapitre est la continuation de travaux de Gilles Schaeffer [**111**] et correspond à l'article [**10**] « Random Maps, Coalescing Saddles, Singularity Analysis, and Airy Phenomena » (soumis à Random Structure and Algorithms) que j'ai réalisé avec Philippe Flajolet, Gilles Schaeffer et Michèle Soria. Une version moins développée [**9**] « Cartes planaires et phénomène d'Airy » avait été présentée à la conférence ICALP'2000.

Les principaux résultats de cet article sont
- le théorème 2 (p. 138) qui donne la taille du noyau au point de transition (via une méthode de col double) ;
- le théorème 3 (p. 140) qui donne la taille du noyau au voisinage du point de transition (via une méthode de cols voisins) ;
- le théorème 4 (p. 142) qui donne la taille du noyau uniformément sur toute une zone contenant le point de transition (via une méthode de points cols coalescents) ;
- le théorème 5 (p. 148) qui montre l'universalité de loi d'Airy, qui est liée aux schémas de composition de deux singularités de type $3/2$;
- le théorème 6 (p. 155) qui montre que diverses familles de cartes ont un noyau dont la taille est régie par une loi d'Airy ;
- le théorème 7 (p. 156) qui montre que, pour diverses familles de cartes, la taille de la plus grande composante multi-connexe est régie par une loi d'Airy ;
- le théorème 11 (p. 160) qui relie les schémas de compositions aux lois stables de la théorie des probabilités.

Tous ces résultats sont nouveaux dans le monde de la combinatoire.

J'ai joué un rôle « central » dans cet article, mes contributions majeures étant d'une part de développer une approche par méthode de cols (doubles ou voisins) pour le régime dit « central » , et d'autre part d'étudier diverses caractéristiques de la fonction d'Airy.

Conclusion, perspectives.

> *« Moore's law[3] teaches us that the power of computers doubles every 18 months, but, during the same time, the standard size of data doubles also, consequently, this forces us to develop fast algorithms. »*
> Robert Sedgewick. 16 mai 2000, Colloquium à l'INRIA Rocquencourt.

Les deux objets de base de cette thèse, les marches et les cartes, apparaissent de façon naturelle aussi bien en informatique théorique qu'en physique statistique, ou encore en combinatoire classique. Les nouveaux résultats énumératifs et asymptotiques que nous obtenons permettent justement d'envisager des algorithmes rapides de génération aléatoire uniforme (par exemple avec des méthodes de rejet). Une implantation en LEDA (bibliothèque C largement diffusée et consacrée notamment au traitement de graphes) est en projet.

Au final, cette thèse illustre la puissance des méthodes de la combinatoire analytique, qui nous permettent non seulement d'améliorer nos connaissances sur différents objets de bases et l'aléa afférent, mais aussi, le cas échéant, nous fournissent des algorithmes efficaces de génération qui nous permettent d'avoir une approche heuristique pour tester différents algorithmes et pouvent de plus guider les découvertes de demain.

[3] Le physisien-chimiste Gordon Moore (1929–), cofondateur d'Integrated Electronics en 1968 (plus connu sous le nom d'Intel), s'est aperçu en regardant des graphiques en 1965 que le nombre de composants (résistors, transistors) d'un circuit imprimé doublait tous les 18 mois.

CHAPITRE 1

Séries génératrices de marches homogènes

Résumé : Ce chapitre est un chapitre d'introduction qui reprend certains résultats originaux de mon mémoire de DEA [**4**]. J'y montre comment expliciter les séries génératrices de marches sur les entiers. Mes principaux résultats sont notamment

- la proposition 3 (p. 24) qui explicite, via un calcul de résidu, l'algébricité de la série génératrice des excursions sur $\mathbb{Z}$;
- le théorème 2 (p. 29) qui explicite, via la méthode du noyau, l'algébricité de la série génératrice des excursions sur $\mathbb{N}$ (= les mots de Dyck généralisés) ;
- le théorème 3 (p. 29) qui explicite, via la méthode du noyau, l'algébricité de la série génératrice des chemins sur $\mathbb{N}$ (= les préfixes des mots de Dyck généralisés) ;
- le théorème 6 (p. 37) qui explicite l'algébricité de la série génératrice trivariée des marches sur $\mathbb{N}$ en comptant les passages par zéros (= les facteurs des mots de Dyck généralisés) ;
- le théorème 8 (p. 38) qui exprime la série génératrice des marches de hauteur bornée à l'aide de quotients de déterminants d'ordre « petit » ;
- le théorème 9 (p. 42) qui explicite l'algébricité de la série génératrice des excursions « dirigées » sur $\mathbb{N}^2$.
- le théorème 10 (p. 46) qui explicite l'algébricité de la série génératrice des chemins diagonaux sur $\mathbb{Z}^2$ (calcul de résultant) ;
- le théorème 11 (p. 49) qui explicite la D-finitude de la série génératrice des excursions sur $\mathbb{Z}^m$.

Tous ces résultats généralisent ainsi les résultats du folklore pour l'instance particulière et fondamentale que constituent les mots de Dyck « classiques ».

1. Préambule

Ce chapitre a pour objectif l'étude de marches aléatoires discrètes ; nous montrons comment énumérer des marches (en combinatoire, on parle volontiers de « chemins ») évoluant dans un réseau discret (inclu dans $\mathbb{Z}^m$) et obéissant à des contraintes diverses. Il s'agit donc d'un modèle de *marches aléatoires* en *temps discret*, dans un *univers discret*. Les contraintes que nous retiendrons sont essentiellement de deux types : celles qui concernent le type de saut possible (par exemple, ne pouvoir faire que des sauts de cavalier d'échecs) et celles qui concernent le domaine dans lequel évolue la marche (par exemple se limiter à un « échiquier » de hauteur finie mais de largeur infinie).

Nous retenons des contraintes suffisamment régulières pour que nos techniques combinatoires puissent trouver leur cadre d'application. Des bijections classiques montrent que notre point de vue « marche discrète », par sa capacité à modéliser divers problèmes combinatoires, s'adapte aisément à des questions plus classiquement posées en terme d'« arbres ».

Les sauts possibles étant fixés a priori, certains auteurs parlent parfois de *modèle homogène en espace* (on a une chaîne de Markov). Par ailleurs, certaines des marches considérées dans cette thèse ont des types de sauts fixés dès le début de la marche mais qui dépendent de « façon régulière » de la position de la marche ; le deuxième chapitre (qui est axé sur le dénombrement des *arbres de génération*) correspond justement à de telles *marches non homogènes en espace* mais encore suffisamment régulières. Nous y verrons en particulier que ces modèles de marches sont isomorphes à des modèles de règles de récritures (sur les entiers) et servent à la génération aléatoire.

Les chemins sont une structure combinatoire qui apparaît en informatique pour de multiples raisons. Par exemple, les chemins les Dyck correspondent à l'évolution d'une file d'attente soumise à des insertions et suppressions (le modèle M/M/1 en théorie des files d'attentes). Par ailleurs, ils surgissent lors de l'analyse sous modèle discret de structures de données dynamiques (le modèle de Françon des « histoires », qui est aussi traité en exercice chez Knuth [**85**], ex. 2.2.2-13, pour l'allocation mémoire partagée). De plus, les chemins de Łukasiewicz sont les traces d'un parcours d'arbre non récursif ; ainsi certains paramètres de parcours se lisent naturellement sur les chemins (telle la taille maximale de pile qui correspond à la hauteur du chemin). Ceci ouvre la voie à l'analyse de paramètres d'arbres utiles notamment pour l'analyse d'algorithmes de manipulation d'arbres de termes en calcul symbolique.

Pour finir, les chemins sont en bijection naturelle avec de nombreux objets de l'analyse combinatoire et une explicitation des propriétés probabilistes des chemins conduit généralement à des informations pertinentes sur ces objets, telles leurs propriétés « statistiques » ou encore des algorithmes de génération. Ainsi, certaines structures bidimensionnelles se ramènent à l'étude de marches unidimensionnelles : les polyominos convexes peuvent être énumérés en se ramenant à des chemins de Dyck bicolores (bijection de Delest–Viennot [**43**]), les animaux dirigés (à source compacte) peuvent être énumérés en considérant des préfixes de chemins de Motzkin [**24, 80**].

Un des résultats majeurs de ce premier chapitre est d'établir, pour une large classe de marches « contraintes » sus-mentionnées, l'algébricité de leurs séries génératrices. La preuve fait appel à la « méthode du noyau », détaillée à la section 4.2. Cette algébricité n'est pas surprenante pour ceux qui auront vu que nos marches peuvent être engendrées par automate à pile déterministe, puisqu'elles peuvent alors être engendrées par une grammaire et ont par conséquent une série génératrice algébrique. Toutefois, notre preuve de l'algébricité donne gratuitement une importante *décomposition* dont nous tirerons grandement profit, pour des formules explicites dans un premier temps, et, ultérieurement, pour l'asymptotique.

Le chapitre 3 s'intéressera aux marches sur un graphe fini. Dans le chapitre 4, nous étudierons l'asymptotique de différents paramètres des classes de marches pour lesquelles nous allons maintenant expliciter les séries génératrices.

1.1. Marches aléatoires. Les marches aléatoires (avec leurs variantes sur les conditions de bords : absorption, réflexion...) ont été étudiées intensivement par les probabilistes. Il s'agit d'une modélisation naturelle de nombreux phénomènes physiques (à commencer par celui découvert par le botaniste anglais Robert Brown en 1827 : dans une goutte d'eau coincée depuis des siècles dans de l'ambre, des graines de pollen avaient une mystérieuse agitation, un parcours chaotique... que l'on ne tarda pas à appeler mouvement brownien et dont l'étude vaudra un prix Nobel à Einstein en 1905).

Les marches aléatoires apparaissent incontournables dans divers domaines allant de problèmes d'ordonnancement en informatique (problème de files d'attente par Fayolle et Iasnogorodski [**53**]), de génétique via les correspondances entre arbres et marches (étude de l'extinction des patronymes par Galton et Watson [**75**]), à des problèmes liés à des réseaux cristallins en physique statistique... Par exemple une fourmi dans un labyrinthe, simulant une marche aléatoire sur un réseau de liens, permet d'étudier la diffusion à deux et trois dimensions dans un milieu poreux ou de déterminer l'exposant critique de la conductivité (Stauffer [**117**]).

Dans le cas des marches aléatoires discrètes, les méthodes combinatoires (qui trouvent leur origine dans des problèmes de dénombrement de chemins dans le plan) permettent souvent l'obtention des formes closes (*i.e.* de formules explicites), si tant est qu'il en existe. Les méthodes probabilistes restent prédominantes dans le cas des modèles continus ; elles sont de plus aptes, par leur souplesse, à capter des paramètres qui restent revêches aux combinatoriciens (ainsi en est-il du maximum d'une marche, que les probabilistes parviennent à traiter aisément grâce à la décomposition de Wiener–Hopf). Toutefois, ces méthodes offrent en général uniquement des résultats asymptotiques du premier ordre là ou pour des problèmes assez « contraints », assez « réguliers », la combinatoire analytique offre quant à elle des formules asymptotiques d'ordre élevé, souvent accompagnées d'un dénombrement *exact*.

1.2. Définition d'une marche en dimension m. Commençons par donner un exemple : celui de l'ivrogne de Pólya. « C'est l'histoire d'un ivrogne qui voudrait bien rentrer chez lui, et qui, toutes les secondes, fait au hasard un pas en avant ou un pas arrière... » D'aucuns, à l'âme scientifique, diront que notre ivrogne a ainsi le comportement d'une marche aléatoire unidimensionnelle. On peut aussi regarder la variante dans le plan, où notre ami fait au hasard un pas en avant, en arrière, à gauche ou à droite. Pólya s'était intéressé à la probabilité que l'ivrogne revienne à son point de départ et on a le résultat suivant : sur une droite ou dans le plan, cette probabilité est 1, tandis qu'en dimension supérieure, cette probabilité est < 1 (0.34 en dimension 3, 0.20 en dimension 4...). Nous verrons à l'exemple 15 (p. 49) comment nous pouvons aborder ce genre de problème.

Nous allons maintenant donner une définition un peu formelle des marches aléatoires. Prévenons d'ores et déjà le lecteur que par marche, nous entendons le « processus », le « procédé » lui-même ; nous appellerons « chemin » tout représentant (*i.e.* toute réalisation) de ce processus. Parfois, nous dirons « marche » au lieu de « chemin », mais cela ne devrait guère gêner le lecteur, habitué sans doute depuis longtemps à ce double langage !

Définition 1 (chemins).
Nous appelons chemin de longueur n sur $\mathbb{Z}^m$ une suite de $n+1$ points de $\mathbb{Z}^m$.

Cette dénomination est justifiée par le fait qu'on peut tracer une ligne polygonale reliant les points et respectant l'ordre sur le chemin.

Définition 2 (Excursions).
Soit E un sous-ensemble de points de $\mathbb{Z}^m$. Nous appelons E-excursion (de longueur n) sur $\mathbb{Z}^m$ un chemin (de longueur n) commençant et finissant en l'origine et dont tous les points sont dans l'ensemble E.

Par la suite, nous abrégerons systématiquement $\mathbb{N}$-excursion en excursion (tout court). Notons par ailleurs que les $\mathbb{Z}$-excursions sont souvent appelées « ponts » par certains probabilistes.

Définition 3 (Marche, poids d'un chemin).
Une marche est définie ici comme une fonction (dite « fonction saut ») ψ qui, à chaque point

A de $\mathbb{Z}^m$, associe un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}$ qui correspond aux points vers lesquels on peut sauter avec un certain poids réel associé, i.e. *$\psi(A) = \{(A_i, p_i)\}$, $A_i \in \mathbb{Z}^m$, $p_i \in \mathbb{R}\}$. Quand les poids p_i sont dans $\mathbb{N}$, on parle de marche avec multiplicité. Quand ils sont dans $\mathbb{R}$, on parle de marche pondérée ; si de plus on a $\sum p_i = 1$ (avec $0 \leq p_i \leq 1$), on parle de marche probabilisée (ou encore de marche aléatoire). Un* chemin pondéré *γ de longueur n est alors une suite $\gamma = (P_0, (P_1, p_1), \ldots, (P_n, p_n))$ avec $(P_{i+1}, p_{i+1}) \in \psi(P_i)$. Son poids $w(\gamma)$ est défini comme*

$$w(\gamma) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

(le poids du chemin est donc le produit du poids de chacun des sauts).

Les marches avec multiplicités permettent d'envisager des modèles pour lesquels on aurait plusieurs façons distinctes de joindre deux mêmes points en une étape (afin de différencier ces sauts, on peut imaginer qu'on les « colore »).

Par ailleurs, insistons sur le fait que le poids est une fonction *multiplicative* (contrairement à la notion de « poids » dans les problèmes d'optimisation de coût sur un graphe, où le poids est généralement une fonction *additive*) ; c'est en effet cette multiplicativité qui modélise adéquatement les suites de choix combinatoires ou probabilisés.

La définition ci-dessus, qui unifie aussi bien le cadre énumératif (avec ou sans multiplicité) que le cadre probabiliste, est clairement indépendante du temps (puisque si $P_i = P_j$ avec $i \neq j$, on a $\psi(P_i) = \psi(P_j)$) et justifie que nous qualifions les marches considérées ici de *marches homogènes en temps.* En fait, nous ne considérons dans ce chapitre que des marches homogènes en temps et *en espace* :

Définition 4 (Sauts, marche homogène en espace). *Soit A un point de $\mathbb{Z}^m$ et $\vec{B}$ un vecteur de coordonnées $(b_1, \ldots, b_m)$, notons $A \dot{+} \vec{B}$ le point dont les coordonnées sont obtenues en faisant la somme des coordonnées de A et de celles de B. Nous dirons que l'on passe du point A au point $A \dot{+} \vec{B}$ en faisant un* saut *$(b_1, \ldots, b_m)$. Une marche est dite* homogène en espace *s'il existe un ensemble de vecteurs $\mathcal{S}$ tel que, pour tout $A \in \mathbb{Z}^m$, on a $\psi(A) = \{((A \dot{+} \vec{S}_i, p_i)), \vec{S}_i \in \mathcal{S}\}$,*

Cette définition ne fait que refléter le fait que les sauts possibles sont les mêmes en *tout* point. Avec un léger abus de langage, nous continuons de qualifier de marche *homogène en espace*, une marche pour laquelle on interdit une région de $\mathbb{Z}^m$ (ce qui introduit donc des conditions de bord pour la « fonction saut » ψ), et pour laquelle les sauts possibles sont toujours les mêmes en *tout* point, sauf que l'on retire ceux qui feraient atterrir dans la région interdite. Par ailleurs, quand l'ensemble $\mathcal{S}$ des sauts possibles est fini, on parlera de *marche à sauts bornés.*

Définition 5 (Série génératrice d'une marche).
Pour une marche donnée, soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des chemins issus de O (un point quelconque de $\mathbb{Z}^m$). La série génératrice de cette marche est alors définie comme

$$F(z, \mathbf{u}) := \sum_{\gamma \in \mathcal{C}} w(\gamma) \mathbf{u}^{f(\gamma)} z^{|\gamma|}$$

où $|\gamma|$ désigne la longueur du chemin γ et où le monôme $\mathbf{u}^{f(\gamma)} = u_1^{k_1} \ldots u_m^{k_m}$ code l'altitude finale du chemin γ (le chemin finissant en un point de coordonnées $(k_1, \ldots, k_m)$).

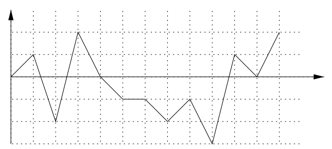
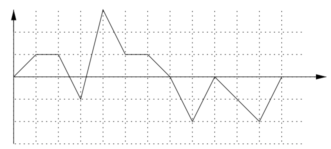
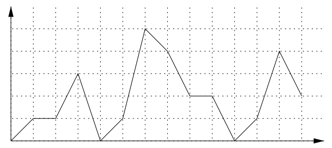
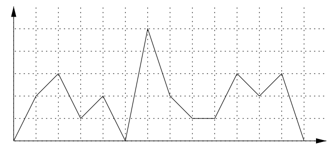
	finissant n'importe où	finissant en 0
sans contrainte de positivité	 $\mathbb{Z}$-chemin (marche)	 $\mathbb{Z}$-excursion (pont)
avec contrainte de positivité	 $\mathbb{N}$-chemin (méandre)	 $\mathbb{N}$-excursion (excursion)

FIG. 1 – Le dictionnaire combinatorico-probabiliste.

Nous regarderons par la suite la série génératrice sous la forme (équivalente)

$$F(z, u_1, \ldots, u_m) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}}} f_{n,k_1,\ldots,k_m} u_1^{k_1} \ldots u_m^{k_m} z^n = \sum_{n \geq 0} f_n(u_1, \ldots, u_m) z^n$$

où $f_{n,k_1,\ldots,k_m}$ désigne le nombre de chemins de longueur n commençant en O et finissant en un point de $\mathbb{Z}^m$ de coordonnées $(k_1, \ldots, k_m)$.

Ainsi la fonction F est dans l'anneau $\mathbb{R}((u_1, \ldots, u_m))[[z]]$ des séries formelles en z et à coefficients « de Laurent » en les u_i. Pour les séries génératrices de marches aléatoires, les coefficients de ces séries de Laurent sont compris entre 0 et 1, et pour les marches avec multiplicités, les coefficients sont des entiers positifs.

Le nombre de chemins de longueur n allant de A au point de coordonnées $(k_1, \ldots, k_m)$ est donné par $f_{n,k_1,\ldots,k_m} := [z^n u_1^{k_1} \cdots u_m^{k_m}] F(z, u_1, \ldots, u_m)$. Le nombre total de chemins de longueur n est $f_n := [z^n] F(z, 1, \ldots, 1)$, lorsque cette quantité est finie.

Définition 6 (Opérateur caractéristique).
On appelle opérateur caractéristique de la marche *l'opérateur linéaire L qui transforme un monôme de $\mathbb{R}[u_1, \ldots, u_m, u_1^{-1}, \ldots, u_m^{-1}]$ en un polynôme de $\mathbb{R}[u_1, \ldots, u_m, u_1^{-1}, \ldots, u_m^{-1}]$:*

$$L(u_1^{k_1} \ldots u_m^{k_m}) = \sum_i p_i u_1^{k_{1,i}} \ldots u_m^{k_{m,i}}$$

si (et seulement si) $\psi(A) = \{(A_i, p_i)\}$ avec A de coordonnées $(k_1, \ldots, k_m)$ et A_i de coordonnées $(k_{1,i}, \ldots, k_{m,i})$. On a donc la récurrence fondamentale

$$f_{n+1}(u_1, \ldots, u_m) = L\left(f_n(u_1, \ldots, u_m)\right) .$$

Nous allons voir dans la suite que c'est le fait d'arriver à coder la marche par un opérateur *linéaire* explicite et tractable qui est un facteur déterminant pour l'obtention d'une équation fonctionnelle satisfaite par la série génératrice de la marche aléatoire. Ceci correspond à une régularité importante (l'homogénéité en temps et en espace) des règles de constructions des chemins.

L'approche que je vais développer dans cette thèse marche à merveille quand L (qui s'étend par linéarité des monômes aux polynômes) s'avère exprimable comme *une* combinaison du jeu d'opérateurs ci-dessous :
- $[u_i^k]$ extrait le coefficient du monôme en u_i de degré k ;
- $\{u_i^k\}$ extrait le monôme en u_i de degré k ;
- $\{u_i^{\geq k}\}$ extrait les monômes en u_i de degré $\geq k$.

Exemple 1. *Opérateur caractéristique*
Plaçons-nous en dimension 1 (les coefficients f_n de la série génératrice sont ainsi dans $\mathbb{R}[[u]]$) et considérons la marche sur $\mathbb{Z}$ qui consiste à faire des pas $(+1,-1)$. Elle se code par l'opérateur caractéristique $L = S + S^{-1}$ (où S est l'opérateur qui code la multiplication par u), ce qui recode de fait la récurrence

$$f_{n+1}(u) = L(f_n(u)) = (u + \frac{1}{u}) f_n(u).$$

Ainsi $L(1+u) = \frac{1}{u} + u + 1 + u^2$. Nous écrirons ci-après, de manière abusive $L = u + u^{-1}$ au lieu de $L = S + S^{-1}$. Si l'on considère maintenant la marche sur $\mathbb{N}$, faire un pas -1 peut nous faire atterrir dans les entiers négatifs ; on exclut ce cas de figure à l'aide de l'opérateur $\{u^{<0}\}$, on a donc $L = u + u^{-1} - \{u^{<0}\}(u + u^{-1})$, qui exprime en fait la récurrence

$$f_{n+1}(u) = L(f_n(u)) = (u + \frac{1}{u}) f_n(u) - \{u^{<0}\}((u + \frac{1}{u}) f_n(u)).$$

Notons que l'opérateur L peut ici s'écrire encore plus simplement $L = u + u^{-1} - \frac{1}{u}[u^0]$, ce qui se voit via les relations suivantes

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u) = L(f_n(u)) &= (u + \frac{1}{u}) f_n(u) - \{u^{-1}\}((u + \frac{1}{u}) f_n(u)) \\ &= (u + \frac{1}{u}) f_n(u) - \{u^{-1}\}(\frac{1}{u} f_n(u)) \\ &= (u + \frac{1}{u}) f_n(u) - \frac{f_n(0)}{u}. \end{aligned}$$

L'évaluation en zéro est licite car les f_n, à cause de la contrainte de positivité (marche sur $\mathbb{N}$), sont ici des polynômes classiques et non plus des polynômes de Laurent. De même, la marche à pas $(-2,+1)$ a pour opérateur caractéristique

$$\begin{aligned} L &= u^{-2} + u - \{u^{<0}\}(u^{-2} + u) = u^{-2} + u - \{u^{-1}\}u^{-2} - \{u^{-2}\}u^{-2} \\ &= u^{-2} + u - \{u^1\} - \{u^0\} = u^{-2} + u - [u^0]\partial - [u^0] \end{aligned}$$

où ∂ représente la dérivation par rapport à u, ce qui ne fait que refléter la relation

$$f_{n+1}(u) = L(f_n(u)) = (u^{-2} + u) f_n(u) - f_n'(0) - f_n(0)\,.$$

■

2. Marches dans un ensemble fini de $\mathbb{Z}^m$

Un premier exemple de marche aisée à traiter est le cas des marches dans un ensemble fini. On n'impose aucune condition d'homogénéité en espace, *i.e.* il peut y avoir autant de règles de déplacements que de points dans l'ensemble borné considéré (toutefois on garde l'homogénéité en temps). Puisque nous sommes dans un *ensemble fini* de points, on a un ensemble fini de règles et on aboutit donc à une série génératrice rationnelle comme le montre le théorème suivant.

Proposition 1. *La série génératrice d'une marche homogène en temps dans un borné de $\mathbb{Z}^m$ est rationnelle.*

DÉMONSTRATION. Un tel ensemble borné est fini, notons p son cardinal. On peut associer à ses p points les p états d'un automate sur un alphabet unaire. On a une transition entre deux états dès lors qu'il y a un pas entre les deux points correspondants, en préservant l'orientation. Si l'on veut compter les marches de longueur k partant d'un sous-ensemble fixé I du borné et finissant dans un sous-ensemble F du borné, il suffit de compter les mots de longueur k dans l'automate où sont pris comme états initiaux les états associés aux points de I et où sont pris comme états finaux les états associés aux points de F (en particulier, si l'on veut compter tous les mots de longueur k, tous les états sont finaux). Dans tous les cas, par le théorème de Chomsky–Schützenberger [**33**], le langage reconnu est rationnel (on dit aussi « régulier ») ainsi que sa série génératrice, qui est, par construction de notre automate, la même que celle de la marche. □

Pour de telles séries génératrices rationnelles, une asymptotique exacte se fait à l'aide de la proposition classique suivante :

Proposition 2 (Asymptotique des fractions rationnelles). *Si F est une fonction rationnelle dont les pôles $\rho_1, \dots, \rho_m$ sont $\neq 0$, alors il existe m polynômes $P_1, \dots, P_m$ (où le degré de P_j est l'ordre du pôle ρ_j moins 1) tels que*

$$F_n = [z^n]F(z) = \sum_{j=1}^{m} P_j(n)\rho_j^{-n}.$$

DÉMONSTRATION. On utilise la décomposition en éléments simples de $F(z)$ puis que

$$[z^n](z-\rho)^{-k} = \frac{(-1)^k}{\rho^{n+k}}\binom{n+k-1}{k-1},$$

ce qui donne un polynôme de degré $k-1$ en n. □

Toutefois, au delà de cette apparente simplicité, les marches sur un tel graphe fini (que le lecteur probabiliste préférera qualifier de « chaînes de Markov » à états dans un pavé de $\mathbb{Z}^m$) posent quantité de problèmes passionnants, relatifs notamment aux temps d'atteinte. Nous reviendrons sur ces considérations au chapitre trois, relatif au « temps de couverture généralisé d'une marche aléatoire sur un graphe ».

Si l'on ne se limite pas à un ensemble fini mais qu'on s'autorise maintenant tout $\mathbb{Z}^m$, tout en ne faisant que des sauts à sauts bornés, on tombe également sur une série génératrice des marches rationnelle (la série génératrice des $\mathbb{Z}$-excursions sera quant à elle algébrique si l'on s'autorise quelques sauts négatifs) comme nous allons le voir dans la section suivante.

3. Marches sur $\mathbb{Z}$ à sauts bornés

L'opérateur caractéristique d'une marche à sauts bornés est la multiplication par un polynôme (de Laurent, *i.e.* un polynôme pour lequel on s'autorise les puissances négatives) P en u, c'est-à-dire que l'ensemble des sauts autorisés est codé par un polynôme $P(u)$. Pour de telles marches, on a directement :

$$f_{n+1}(u) = P(u)f_n(u) = P(u)^n f_0(u)$$

et donc, quand $f_0(u) = 1$ (*i.e.* quand on part de l'origine),

$$F(z,u) = \frac{1}{1 - P(u)z}.$$

En particulier, la série génératrice univariée des marches est $F(z,1) = \frac{1}{1-P(1)z}$. Par ailleurs, une marche à sauts bornés homogène en espace et *sans sauts arrière* a une série génératrice des $\mathbb{Z}$-excursions rationnelle : il suffit d'évaluer $F(z,u)$ en $u = 0$ et comme $P(0) \neq \infty$ (puisque nous n'avons pas de retour en arrière), la série génératrice des $\mathbb{Z}$-excursions est $F_0(z) = \frac{1}{1-P(0)z}$. Bien sûr, elle se réduit trivialement à $F_0(z) = 1$ si on n'a pas de retour sur place.

Notons que la singularité dominante est $P(1)^{-1}$ pour les chemins et $P(0)^{-1}$ pour les $\mathbb{Z}$-excursions. Dans le contexte énumératif, P est à coefficients dans $\mathbb{N}$, et la singularité dominante est donc un nombre rationnel. En fait, $P(1)^{-1}$ demeurera une singularité dans les marches des sections suivantes, mais elle ne restera pas forcément dominante.

Certaines marches à sauts bornés, même avec une modification qui rompt leur homogénéité en temps, peuvent demeurer rationnelles. Voici un exemple qui illustre ce genre de situations.

Exemple 2. *Une variation markovienne d'ordre deux du triangle de Pascal*
Considérons la variante suivante du triangle de Pascal (`EIS A052509`[1]) dans laquelle chaque terme est la somme de celui qui se trouve au-dessus de lui et de celui qui se trouve deux cases au dessus, dans la colonne qui le précède (à une distance d'un saut de cavalier, pour être imagé).

1
1,1
1,2,1
1,3,2,1
1,4,4,2,1
1,5,7,4,2,1
1,6,11,8,4,2,1
1,7,16,15,8,4,2,1
1,8,22,26,16,8,4,2,1
1,9,29,42,31,16,8,4,2,1
1,10,37,64,57,32,16,8,4,2,1
1,11,46,93,99,63,32,16,8,4,2,1

Ce triangle étant défini par la récurrence
$f_0(u) = 1$,
$f_1(u) = 1 + u$,
$f_{n+1}(u) = f_n(u) + uf_{n-1}(u) + u^n$,
l'explicitation de la série génératrice (z correspond à la longueur, au numéro de ligne, et u correspond à l'altitude finale, le numéro de colonne) ne pose aucune difficulté :

$$F(z,u) = \frac{1+uz-z-uz^2+z/(1-uz)}{1-z-uz^2}.$$

■

Dans le cas moins trivial où l'on a non pas que des pas stationnaires ou vers la droite mais également des pas vers la gauche, la série génératrice des $\mathbb{Z}$-excursions n'est plus rationnelle et devient algébrique. Le résultat suivant fait partie du folklore :

Proposition 3 (Algébricité des marches sur $\mathbb{Z}$ finissant à hauteur donnée). *Une marche à sauts bornés homogène en espace (qui autorise au moins un saut vers l'arrière) a une série génératrice des $\mathbb{Z}$-excursions algébrique, cette dernière s'exprimant comme*

$$F_0(z) = z \sum_{u_i(z)} \frac{u_i'(z)}{u_i(z)} = -z \sum_{v_i(z)} \frac{v_i'(z)}{v_i(z)}$$

[1]EIS renvoie à « The Encyclopia of Integer Sequences », l'encyclopédie des suites entières de Sloane, accessible en ligne sous `http ://www.research.att.com/~njas/sequences/`.

où les $u_i(z)$ sont les racines de $1 - zP(u) = 0$ tendant vers 0 quand $z \to 0$ et où les $v_i(z)$ sont les racines qui divergent en 0. Plus généralement, la série génératrice F_k des marches sur $\mathbb{Z}$ commençant en 0 et finissant à hauteur k s'exprime également à l'aide de ces racines :

$$F_k(z) = z \sum_{u_i} \frac{u_i'(z)}{u_i^{k+1}(z)} \quad (\textit{ pour } -\infty < k < c),$$

$$F_k(z) = -z \sum_{u_i} \frac{v_i'(z)}{v_i^{k+1}(z)} \quad (\textit{ pour } -d < k < \infty).$$

Démonstration. Plaçons-nous dans une couronne de convergence de $F(z,u)$ (prenons par exemple $|z| < \frac{1}{2P(1)}$ et $\alpha < |u| < \beta$ où $[\alpha, \beta]$ est un intervalle sur lequel $P(u) < 2P(1)$), sur laquelle on peut utiliser la formule de Cauchy puisque $F(z,u)$ y est analytique en u :

$$F_k(z) = [u^k]F(z,u) = [u^k]\frac{1}{1 - zP(u)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(z)} \frac{F(z,u)}{u^{k+1}} du$$

où $\gamma = \{|u| = \frac{\alpha+\beta}{2}\}$ est une courbe simple dans le plan de u contenant 0. L'intégrante est d'ordre u^{c-k-1} en 0 (donc analytique en 0 quand $k \leq c-1$) et d'ordre u^{-d-k-1} en $+\infty$ (donc analytique en $+\infty$ quand $k \geq -d+1$).

Pour $k \leq c - 1$, d'après le théorème des résidus, en rapetissant le contour d'intégration vers 0, on a alors, pour les pôles de F/u^{k+1} inclus dans le domaine défini par γ (qui sont ici les $u_i(z)$ tendant vers 0 quand $z \to 0$) :

$$F_k(z) = \sum_{u_i \text{ pôle}} \operatorname{Res}\left(\frac{F}{u^{k+1}}, u_i\right) = \sum_{u_i \text{ pôle}} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{u^{k+1} - u^{k+1}zP(u)}, u_i\right)$$

Remarque : les u_i, en tant que zéros d'une équation algébrique, sont des séries de Puiseux. Comme les pôles sont d'ordre 1 (ceci résulte d'une discussion sur le polynôme de Newton associé à $1 - zP(u)$, faite à la section 4.3), les résidus sont égaux aux limites suivantes

$$F_k(z) = \sum_{u_i \text{ pôle}} \lim_{u \to u_i} \frac{u - u_i}{u^{k+1} - u^{k+1}zP(u)} = \sum_{u_i \text{ pôle}} \lim_{u \to u_i} \frac{1}{(k+1)u^k - z(u^{k+1}P'(u) + (k+1)u^k P(u))}.$$

La dernière égalité provient de l'application de la règle de l'Hospital. Comme par ailleurs $P(u_i) = \frac{1}{z}$ et $P'(u_i)u_i'(z) = (\frac{1}{z})'$ on a donc

$$F_k(z) = \sum_{u_i \text{ pôle}} \frac{1}{-zu_i^{k+1}P'(u_i)} = z \sum_{u_i \text{ pôle}} \frac{u_i'(z)}{u_i^{k+1}(z)}.$$

Quand $k > -d$, on élargit au contraire à l'infini le contour d'intégration et l'on collecte ainsi les résidus, qui proviennent tous exclusivement des branches divergentes v_i. □

Ce résultat est similaire à l'assertion de Furstenberg [**74**] : « la série obtenue en prenant les coefficients diagonaux d'une série multivariée rationnelle est algébrique. » (En fait l'article cité a surtout pour but de montrer que la rationalité est conservée quand le corps de base est fini.)

Exemple 3. *Équilibres lors de tirages à pile ou face*
Pour la marche de « Dyck » où l'on s'autorise un pas en avant et un pas en arrière, on a donc

$P(u) = u + \frac{1}{u}$. Pour les chemins, on aboutit à

$$F_{\mathbb{Z}}(z,1) = \frac{1}{1-P(1)z} = \frac{1}{1-2z} = 1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + O(z^4)$$

et pour les $\mathbb{Z}$-excursions (c'est-à-dire le nombre de tirages de longueur n menant à un équilibre), on n'a pas la formule rationnelle puisque $P(0) = \infty$. En fait, on peut s'en tirer avec les manipulations suivantes :

$$F_{\mathbb{Z},0}(z,u) = \sum_{n\geq 0}[u^0]P(u)^n z^n = \sum_{n\geq 0}[u^0]\sum_k \binom{n}{k} u^{-k}u^{n-k}z^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n} z^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}} = 1 + 2z^2 + 6z^4 + 20z^6 + O(z^8)$$

Mais il reste bien sûr préférable et surtout plus rapide d'appliquer la formule donnée à la proposition précédente, à savoir $F_0(z) = \frac{u_1}{-zu_1}$ avec $u_1(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z^2}}{2z}$, la racine nulle en 0 de $1 - zP(u) = 0$. ∎

4. Marches sur $\mathbb{N}$ à sauts bornés

Nous allons maintenant présenter et utiliser la méthode du noyau pour regarder ce que l'on obtient lorsque l'on s'interdit les entiers négatifs, c'est ce que nous appelons une « marche sur $\mathbb{N}$ ». Je traiterai au chapitre 2 le cas de marches à sauts non-bornés ; je considére maintenant le cas des marches à sauts bornés.

4.1. Obtention de l'équation fonctionnelle. Les sauts autorisés sont codés via le polynôme

$$P(u) = \sum_{\text{sauts } k} u^k = \sum_{i=-c}^{d} p_i u^i$$

qui reflète le fait que l'on autorise un certain nombre de sauts (dont le plus grand vers l'arrière a une amplitude c et le plus grand vers l'avant une amplitude d) et où les p_i sont les poids de chaque saut. La marche à pas $(+1,-1)$ a donc $P(u) = u + \frac{1}{u}$ comme polynôme caractéristique.

L'équation fonctionnelle satisfaite par la série génératrice $F(z,u)$ d'une telle marche sur $\mathbb{N}$ à sauts bornés s'obtient en écrivant, pour chaque n, l'égalité reliant le coefficient de z^n à celui de z^{n+1} et en sommant alors verticalement ces égalités (c'est ici que joue la linéarité de l'opérateur L). Détaillons ce procédé.

Avec l'aide de l'opérateur caractéristique L, on peut définir f_n par récurrence :

$$\begin{cases} f_0(u) = u^0 \text{ (on pourrait choisir de partir d'une autre valeur initiale)} \\ f_{n+1}(u) = Lf_n(u) = \{u^{\geq 0}\}P(u)f_n(u) = P(u)f_n(u) - \{u^{<0}\}P(u)f_n(u)\,. \end{cases}$$

Rappelons ici que $\{u^{<0}\}$ représente la somme des monômes de degré négatif. Comme nos opérateurs sont linéaires, en multipliant par z^{n+1}, on obtient :

$$z^{n+1}f_{n+1}(u) = z\,(z^n P(u)f_n(u)) - z\{u^{<0}\}P(u)f_n(u)z^n$$

en sommant sur n, on a :

$$\sum_{n\geq 0} z^{n+1}f_{n+1}(u) = zP(u)\sum_{n\geq 0} z^n f_n(u) - z\sum_{n\geq 0}\{u^{<0}\}P(u)f_n(u)z^n$$

en ajoutant $z^0 f_0(u) = 1$ aux deux membres, et en développant le $\{u^{<0}\}$, on obtient :

$$F(z,u) = 1 + zP(u)F(z,u) - z \sum_{n\geq 0} \sum_{j<0} \left([u^j]\, P(u) f_n(u)\right) u^j z^n .$$

Or la somme double est une somme de termes du type $\sum_{n\geq 0} u^j [u^j] p_k u^k f_n(u) z^n$ qui se récrivent chacun en terme de dérivées de $F(z,u)$ par rapport à u, évaluées en $u = 0$, d'où l'équation fonctionnelle fondamentale

$$(1 - zP(u))\, F(z,u) = 1 - z \sum_{k=0}^{c-1} r_k(u) F_k(z) \tag{1}$$

$$r_k(u) := \{u^{<0}\}(P(u)u^k) = \sum_{j=-c}^{-k-1} p_j u^{j+k} \tag{2}$$

où $F_k = [u^k]F(z,u)$ vaut $\frac{1}{k!}$ fois la dérivée k-ième de $F(z,u)$ en $u = 0$, et où les r_k sont des polynômes de Laurent (dont les monômes ont des degrés compris entre $-c + k$ et -1). On a ainsi obtenu une équation où le membre de droite s'exprime désormais en termes de c fonctions inconnues ! Mais nous allons de suite voir que ces fonctions inconnues $F_k(z) = \dfrac{\partial^k}{k!\partial u^k} F(z,0)$ ne sont pas un obstacle.

4.2. La méthode du noyau. La méthode que nous utiliserons ici pour résoudre les équations fonctionnelles auxquelles nous venons d'aboutir et qui donnent la série génératrice à déterminer est connue par certains probabilistes sous le nom de « méthode du noyau » ; elle a par exemple été utilisée pour résoudre des équations fonctionnelles apparaissant dans des problèmes de files d'attente [**53**]. Elle fait partie du folklore et on en trouve les premières traces en combinatoire dans Knuth sur un exemple particulier (*i.e.* les exercice 4 et 11 de la section 2.2.1 du vol.1 de [**85**] explicitent la série génératrice des marches de Dyck en utilisant en fait ce que nous appelons maintenant la méthode du noyau) et dans un article de Cori et Richard sur les cartes [**37**].

Pour déterminer les fonctions inconnues du membre droit, la méthode du noyau consiste à annuler $1 - zP(u)$; ainsi, en résolvant l'équation $1 - zP(u) = 0$ par rapport à u, on obtient un certain nombre de solutions $u_1, \ldots, u_r$ que l'ont peut licitement substituer à u (puisque ces solutions sont dans $\mathbb{C}[[z^{1/c}]]$ et que notre série $F(z,u)$ est dans $\mathbb{C}[[z]][u]$) dans le membre de droite de l'équation (1), qui est alors nul lui aussi. On a donc un système qui, s'il est de rang plein, permet de déterminer les fonctions inconnues $\frac{\partial^i}{\partial u^i} F(z,0)$. On a alors totalement déterminé $F(z,u)$ qui est algébrique car exprimable en termes de fonctions algébriques.

4.3. Algébricité des marches à sauts bornés. Soit c la taille du plus grand pas en arrière admis. (Lorsque $c = 0$, on a en fait affaire à des marches qui ne reviennent jamais en arrière ; la contrainte de positivité ne joue pas et la section précédente montre que la résolution est immédiate, donc nous supposons $c > 0$ pour le restant de cette section.)

Théorème 1 (Algébricité des marches sur $\mathbb{N}$ de type fini). *Une marche sur $\mathbb{N}$ à sauts bornés a une série génératrice bivariée $F(z,u)$ algébrique (z code la longueur, u l'altitude finale) :*

$$F(z,u) = \frac{Q(z,u)}{K(z,u)} = \frac{\prod_{i=1}^{c}(u - u_i)}{u^c - zu^c P(u)} = \frac{1}{-zp_d \prod_{i=1}^{d}(u - v_i)}$$

où K et Q sont définis dans les formules (4) et (5) de la preuve ci-dessous.

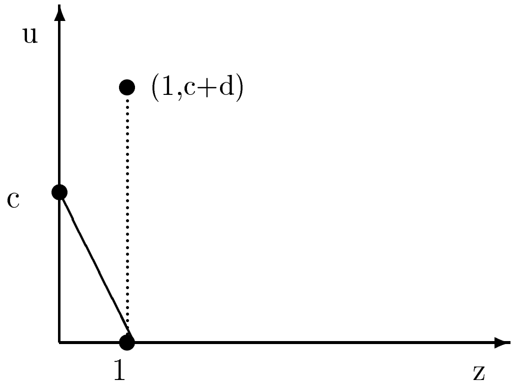
DÉMONSTRATION. Nous avons établi ci-dessus l'équation fonctionnelle fondamentale

$$(1 - zP(u))\, F(z,u) = 1 - z \sum_{k=0}^{c-1} r_k(u) F_k(z)\,, \tag{3}$$

définissons le noyau K comme le polynôme

$$K(z,u) := u^c - zu^c P(u)\,, \tag{4}$$

ce n'est rien d'autre que, dans l'équation fonctionnelle (3) ci-dessus, le coefficient de $F(z,u)$ rendu entier. On a ainsi un polynôme en u de degré $c+d$ et dont le terme constant est $-zp_{-c}$. Lorsque $K(z,u) = 0$, en utilisant le polygone de Newton[2] pour développer les solutions en série de Puiseux, on obtient $c+d$ solutions $u_1, \dots, u_{c+d}$.



Notation 1. *Le diagramme de Newton ci-dessus nous permet d'affirmer l'existence*
- *de c petites branches (« petites » car elles tendent vers 0 en 0), que nous noterons $u_i(z)$ (pour $i = 1, \dots, c$), vérifiant $u_i(z) \sim (-1)^{\frac{i-1}{c}} z^{1/c}$ quand $z \sim 0$;*
- *et de d branches infinies en 0, que nous noterons $v_1, \dots, v_d = u_{c+1}, \dots, u_{c+d}$, et vérifiant $v_i(z) \sim (-1)^{\frac{i-1}{d}} z^{-1/d}$ quand $z \sim 0$,*

Les racines sont donc toutes distinctes. Posons

$$Q(z,u) := u^c\big(1 - z \sum_{k=0}^{c-1} r_k(u) F_k(z)\big). \tag{5}$$

En général, la stratégie de la méthode du noyau se poursuit en substituant u par les c petites branches (opération licite car la substitution par ces petites branches nous fait demeurer dans le corps des séries de Puiseux en z) ; on obtient ainsi un système linéaire

$$\begin{cases} u_1^c\big(1 - z \sum_{k=0}^{c-1} r_k(u_1) F_k(z)\big) = 0 \\ \vdots \\ u_i^c\big(1 - z \sum_{k=0}^{c-1} r_k(u_i) F_k(z)\big) = 0 \\ \vdots \\ u_c^c\big(1 - z \sum_{k=0}^{c-1} r_k(u_c) F_k(z)\big) = 0 \end{cases}$$

[2]le lecteur non familier avec ce sujet consultera avec profit la monographie de J. Dieudonné [**45**] ou encore le texte original de Newton lui-même, dans l'agréable compilation de textes historiques en « algorithmique » [**32**].

qui permet de déterminer les c inconnues $F_k(z)$ pour $k = 0, \ldots, c-1$.

Une astuce due à Mireille Bousquet-Mélou [**27**] permet de sauter la fastidieuse résolution d'un tel système. En regardant K et Q comme des polynômes en u et en remplaçant u par u_i (pour $i = 1, \ldots, c$) dans l'équation (1), on voit que les racines $u_1, \ldots, u_c$ de K sont également racines de $Q(z,u)$. Comme le polynôme Q est de degré c en u et puisqu'il est unitaire, on a la factorisation

$$Q(z,u) = \prod_{i=1}^{c} (u - u_i).$$

On a également, avec $p_d := [u^d]P(u)$ (*i.e.* la multiplicité du plus grand pas en avant) :

$$K(z,u) = -zp_d \prod_{i=1}^{c+d} (u - u_i).$$

Ainsi

$$F(z,u) = \frac{Q(z,u)}{K(z,u)} = \frac{\prod_{i=1}^{c}(u-u_i)}{-zp_d \prod_{j=1}^{c+d}(u-u_j)} = \frac{1}{-zp_d \prod_{i=1}^{d}(u - v_i)}$$

et on a prouvé l'algébricité de la série génératrice F. □

Notons $p_{-c} := [u^{-c}]P(u)$ (p_{-c} est donc la multiplicité du plus grand retour en arrière), on obtient les deux théorèmes suivants :

Théorème 2 (Excursions sur ℕ à sauts bornés). *Une marche sur* ℕ *à sauts bornés a une série génératrice des excursions algébrique et cette dernière vaut*

$$\frac{(-1)^{c+1}}{p_{-c}z} \prod_{i=1}^{c} u_i(z)$$

*où p_{-c} est la multiplicité du plus grand saut vers l'arrière (celui d'amplitude c) et où les $u_i(z)$ sont les « petites » racines (*i.e.* convergeant vers 0 quand $z \to 0$) de l'équation dite « du noyau »* $1 - zP(u) = 0$.

Démonstration. Pour dénombrer les excursions, c'est-à-dire, rappelons-le, les marches qui finissent en 0, on regarde $[u^0]F(z,u)$, *i.e.* $F(z,0)$. On a donc

$$\begin{aligned} F(z,0) &= \frac{Q(z,0)}{K(z,0)} = \frac{Q(z,0)}{[u^0]K(z,u)} = \frac{Q(z,0)}{[u^0]u^c - z[u^0]u^cP(u)} \\ &= \frac{Q(z,0)}{-p_{-c}z} = \frac{\prod_{i=1}^{c}(0-u_i)}{-p_{-c}z} = \frac{(-1)^{c+1}}{p_{-c}z}\prod_{i=1}^{c} u_i = \frac{(-1)^{d+1}}{zp_d \prod_{i=1}^{d} v_i}. \end{aligned}$$

□

Théorème 3 (Chemins sur ℕ à sauts bornés). *Une marche sur* ℕ *à sauts bornés a une série génératrice des marches algébrique et elle vaut*

$$\frac{1}{1 - zP(1)} \prod_{i=1}^{c} (1 - u_i(z))$$

Démonstration. Pour dénombrer les marches, on regarde $\sum_k [u^k]F(z,u)$, *i.e.* $F(z,1)$. Ainsi, on obtient :

$$F(z,1) = \frac{Q(z,1)}{K(z,1)} = \frac{1 - z\sum_{k=0}^{c-1} r_k(1)F_k(z)}{1 - zP(1)}$$

$$= \frac{1}{1 - zP(1)} \prod_{i=1}^{c} (1 - u_i) = \frac{1}{-zp_d \prod_{i=1}^{d} (1 - v_i)}.$$

□

Les théorèmes 2 et 3 ont été obtenus en mars 1998 [**4**], indépendamment de M. Petkovšek [**105**] et de M. Bousquet-Mélou & M. Petkovšek [**28**].

Exemple 4. *Marche de Dyck*
La plus simple de ces marches, qui présente néanmoins son intérêt, est la marche de « Dyck » que nous avons déjà regardée en tant que marche sur $\mathbb{Z}$. Rappelons qu'on s'autorise un pas en avant et un pas en arrière, on a donc le polynôme caractéristique $P(u) := u^{-1} + u$. Or $K(z,u) = u - z(u^2+1)$ et $K(z,u) = 0$ conduit à

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1-\sqrt{1-4z^2}}{2z} = z + z^3 + 2z^5 + 5z^7 + O(z^9) \\ v_1 = \frac{1+\sqrt{1-4z^2}}{2z} = z^{-1} - z - z^3 - 2z^5 - 5z^7 + O(z^9). \end{cases}$$

On a donc $F(z,u) = \frac{-1}{z(u-v_1)}$ et, pour la série génératrice des excursions, on a $F(z,0) = \frac{u_1}{z}$ ou, avec les branches divergentes, $F(z,0) = \frac{1}{zv_1}$.

Attardons-nous sur la singularité en $z = \frac{1}{2}$ pour $F(z,1)$ et $F(z,0)$. Que l'on considère au choix

– la marche de Dyck sur $\mathbb{Z}$, dont la série génératrice est

$$F_{\mathbb{Z}}(z,1) = \frac{1}{1 - P(1)z} = \frac{1}{1-2z} = 1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + O(z^4),$$

– les $\mathbb{Z}$-excursions de Dyck, dont la série génératrice est

$$F_{\mathbb{Z}}(z,0) = \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}} = 1 + 2z^2 + 6z^4 + 20z^6 + O(z^8),$$

– la marche de Dyck sur $\mathbb{N}$, dont la série génératrice est

$$F_{\mathbb{N}}(z,1) = \frac{2}{1 - 2z + \sqrt{1-4z^2}} = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 6z^4 + 10z^5 + O(z^6),$$

– les $\mathbb{N}$-excursions de Dyck, dont la série génératrice est

$$F_{\mathbb{N}}(z,0) = \frac{1 - \sqrt{1-4z^2}}{2z^2} = 1 + z^2 + 2z^4 + 5z^6 + 14z^8 + O(z^{10}).$$

On remarque qu'il existe à peu près « autant » (c'est-à dire d'ordre exponentiel 2^n) de marches de chaque type. Par exemple, dans le dernier cas, on a des contraintes très fortes (revenir en 0 et rester > 0) alors que dans le premier on s'autorise toute la droite et la marche peut s'arrêter n'importe où. En fait, on a respectivement, pour les quatre cas envisagés, une asymptotique (avec n pair pour les cas appropriés) en

	finissant n'importe où	finissant en 0
sans contrainte de positivité	$\mathbb{Z}$-chemins $f_{\mathbb{Z},n}(1) \sim 2^n$	$\mathbb{Z}$-excursions $f_{\mathbb{Z},n}(0) \sim \sqrt{2}\frac{2^n}{\sqrt{\pi n}}$
≥ 0	$\mathbb{N}$-chemins $f_{\mathbb{N},n}(1) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2^n}{\sqrt{\pi n}}$	$\mathbb{N}$-excursions $f_{\mathbb{N},n}(0) \sim 2\sqrt{2}\frac{2^n}{\sqrt{\pi n^3}}$

Ce tableau précise le poids des contraintes imposées. Ces comportements s'éclairent à la lumière de l'analyse de singularité et nous y reviendrons au chapitre 4.

■

Exemple 5. *Marches de Motzkin colorées*
Une marche de Motzkin m-colorée est telle que l'on a les sauts $+1$ et -1 ainsi que m différents sauts $+0$ (que l'on peut imaginer colorés avec m couleurs différentes) ; le polynôme caractéristique de la marche est donc $P(u) = 1/u + m + u$.

L'annulation du noyau fournit une racine $u_1(z)$ convergente en 0 de $u - z(1+mu+u^2) = 0$ et on a donc

$$F(z,0) = \frac{1 - zm - \sqrt{1 - 2zm - (4 - m^2)z^2}}{2z^2}.$$

Pour $m = 0$, on retrouve les chemins de Dyck $F(z,0) = 1 + z^2 + 2z^4 + 5z^6 + 14z^8 + O(z^{10})$.

Pour $m = 1$, ce sont les chemins de Motzkin proprement dits

$$F(z,0) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z^2} = 1 + z + 2z^2 + 4z^3 + 9z^4 + +21z^5 + 51z^6 + O(z^7).$$

Pour $m = 2$, on retombe sur les nombres de Catalan $F(z,0) = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + 14z^4 + O(z^5)$; une interprétation combinatoire consiste à mettre ces marches en bijection avec les arbres binaires à n nœuds internes : remplacer les paliers du premier type par des nœuds avec un fils nœud à droite et une feuille à gauche et réciproquement pour les paliers du deuxième type. Une autre interprétation combinatoire, cette fois directement sur la marche, consiste à regarder les pas deux par deux dans la marche (+1,-1) et à remplacer +1+1 par +1 dans la marche (+1,+0,+0',-1), -1-1 par -1, -1+1 par 0 et +1-1 par 0'.

Pour $m = 3$, on obtient la suite (1,3,10,36,137,543,2219,9285,39587,171369,751236,. . .) qui compte par ailleurs certains polyominos (à n cellules) sur un réseau hexagonal `(EIS A002212)`.

■

Exemple 6. *Marches de Lukasiewicz*
Les marches de Łukasiewicz sont les marches sur $\mathbb{N}$ à sauts bornés pour lesquelles il n'y a que -1 comme saut vers l'arrière.

Le résultat suivant est un classique des années 1950-1960 dont les sources sont nombreuses (Raney, De Bruijn, Knuth, Dvoretzky–Motzkin, Łukasiewicz, etc.).

Proposition 4 (Correspondance de Łukasiewicz). *Pour un ensemble fini $E \in \mathbb{N}$, les arbres d'arités fixées (dans E) et à n nœuds sont en bijection avec les excursions sur $\mathbb{N}$ de longueur n et à pas $e - 1$ pour $e \in E$.*

Démonstration. Considérons un arbre E-aire et faisons-en un parcours infixe (nœud, fils gauche, fils droit) ; à chaque nouveau nœud (interne et externe) on pose a_i =arité de ce i-ième nœud. La suite $(a_1-1, a_2-1, \dots, a_n-1)$ $(a_i \in E)$ est bien une excursion sur $\mathbb{N}$.

L'injection dans l'autre sens est immédiate. Prenons deux excursions distinctes $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $a' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$. Partons d'une racine et si $a_i = -1$, alors on pose une feuille, et on remonte au père et si $a_i >= 0$, alors on attache $a_i + 1$ feuille au nœud courant et passe au fils gauche.

Ainsi, deux excursions distinctes donnent bien, via le codage inverse du précédent deux arbres distincts et qui sont de plus des arbres E-aires. □

Remarque : le fait que le saut vers l'arrière soit -1 implique que l'équation du noyau, $y = z\phi(y)$, est une équation de point fixe et il n'y a qu'une seule petite branche à l'équation (ceci découle également de l'analyse du polygone de Newton). Nous pouvons alors exploiter la formule donnant la série génératrice de telles marches pour retrouver par méthode de noyau le résultat classique :

Proposition 5. *La série génératrice des arbres $(a_1, \dots, a_m)$-aires est une fonction algébrique qui vérifie $Y = z\phi(Y)$ avec $\phi(u) = 1 + u^{a_1} + \dots + u^{a_m}$. Conséquemment, le nombre d'arbres s'exprime comme $(m-1)$ sommes emboîtées de multinomiaux (voir l'équation 6)*

Démonstration. Par inversion de Lagrange–Bürmann, si $Y = z\phi(Y))$ avec $\phi_0 \neq 0$ alors

$$[z^n]\psi(Y(z)) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\phi(u)^n\psi'(u)\,.$$

Ceci nous permet d'exprimer le nombre d'excursions comme une somme de multinomiaux. On a en effet

$$[z^n]F(z,0) = [z^{n+1}]u_1(z) = \frac{1}{n+1}[u^n](1 + u^{a_1} + \dots + u^{a_m})^{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}[u^n] \sum_{e_0+\dots+e_m=n+1} \binom{n+1}{e_0, \dots, e_m} u^{0e_0+a_1e_1+\dots+a_me_m}$$

$$[z^n]F(z,0) = \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{e_0+\dots+e_m=n+1 \\ a_1e_1+\dots+a_me_m=n}} \binom{n+1}{e_0, \dots, e_m}. \tag{6}$$

Notons que chaque terme s'interprète comme le nombre d'arbres ayant $e_0, e_1, \dots,$ sommets de degré $0, a_1, a_2, \dots$.

En utilisant les deux contraintes de sommation, on peut exprimer deux des indices en fonctions des autres et on trouve ainsi que le nombre d'excursions de Łukasiewicz (et donc d'arbres $(a_1, \dots, a_m)$-aires) est exprimable comme $m-1$ sommes emboîtées. □

Par exemple, les arbres binaires-ternaires (chaque nœud a 2 ou 3 fils) sont en bijection avec les excursions de la marche $(-1, +1, +2)$ et on a donc la formule

$$[z^n]F(z,0) = \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{e_0+e_1+e_2=n+1 \\ 2e_1+3e_2=n}} \binom{n+1}{e_0, e_1, e_2} = \frac{1}{n+1} \sum_{e_1 \leq n+1} \binom{n+1}{\frac{2}{3}n - \frac{1}{3}e_1 + 1, e_1, \frac{n-2e_1}{3}}.$$

Pour les arbres unaires-binaires, la formule se simplifie grandement et l'on retombe bien sûr sur la marche $(-1, +0, +1)$, c'est-à-dire sur les nombres de Motzkin vus ci-dessus :

$$[z^n]F(z,0) = \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{e_0+e_1+e_2=n+1 \\ e_1+2e_2=n}} \binom{n+1}{e_0, e_1, e_2} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} \binom{n+1}{k} \binom{n+1-k}{k-1}.$$

■

4.3.1. *Langages de Dyck généralisés.* Le fait que le langage de Dyck (classique) et que des « généralisations » du type langages de Motzkin colorés (pour lesquels on autorise des pas +1, -1 et un certains nombres de paliers distincts ou « colorés ») sont des langages algébriques est un résultat bien connu. Cette algébricité vaut en fait pour une classe bien plus large de langages, que nous appellerons langages de Dyck généralisés.

Les « langages de Dyck généralisés » sont bâtis à partir d'un alphabet fini : on donne à chaque lettre a_i une valeur entière positive ou négative n_i, et on forme un langage avec des conditions de positivité similaires à celles des mots de Dyck (valeur totale nulle, valeur positive pour tous les facteurs gauches).

Un peu d'histoire... contemporaine. Les travaux de Noam Chomsky et Marcel-Paul Schützenberger sur les grammaires formelles justifient le fait que les langages de Dyck généralisés soient algébriques (car ils peuvent être reconnus par un automate à pile). Il y a environ dix ans, Jacques Labelle et Yeong-Nan Yeh [**90**] furent les premiers à exhiber une grammaire algébrique pour les langages de Dyck « symétriques » (à chaque pas d'amplitude positive, correspond un pas d'amplitude négative).

Quelques années après, en 1996, des combinatoriciens de Florence (Donatella Merlini, Renzo Sprugnoli et Cecilia Verri [**96**]) ont exhibé une grammaire génératrice pour les langages de Dyck généralisés (sans aucune restriction de symétrie), et pour lesquels ils donnaient aussi une récurrence pour l'aire, qu'ils exploitent pour obtenir une forme close dans le cas particulier des excursions de Dyck et de Motzkin, ce qui leur permit de donner le premier ordre asymptotique de l'aire pour ces cas « quadratiques ».

Cette grammaire a ensuite été utilisée par Philippe Duchon [**48**] (à Toronto, durant la session 1998 du colloque FPSAC) qui a donné une formule asymptotique partielle pour le dénombrement des marches $(\alpha, -\beta)$ (c'est en fait équivalent à considérer des marches de Dyck sous une droite de pente rationnelle) et qui a aussi donné le premier ordre asymptotique de l'aire des marches $(\alpha, -1)$.

À ce même colloque, Marko Petkovšek [**105**] montra qu'une classe de récurrences (avec quelques contraintes, notamment que la récurrence soit bien fondée, ce qui est le cas des langages de Dyck généralisés) aboutit à une série génératrice algébrique (Mireille Bousquet-Mélou s'est ensuite jointe à M. Petkovšek pour la version journal de ce résultat [**28**]).

Par ailleurs, en mars 1998, Renzo Pinzani et Elisa Pergola ont présenté lors d'un séminaire au Projet Algorithmes des conjectures sur l'algébricité de différentes « marches ». Ceci a servi de point de départ à mon mémoire de DEA [**4**] et dans lequel il était montré algébriquement que les séries génératrices étaient algébriques. C'est alors qu'avec Alain Denise, Danièle Gardy et Dominique Gouyou-Beauchamps,nous avons résolu d'autres conjectures de Pinzani (sur la rationalité ou la transcendance de certaines marches), puis Mireille Bousquet-Mélou, qui avait déjà rencontré des équations similaires dans d'autres problèmes combinatoires, nous signala que l'on pouvait court-circuiter une résolution de système pour la preuve de l'algébricité. Cette collaboration donna lieu à notre article hexacéphale sur les arbres de génération [**6**], sur lesquels nous reviendrons dans le deuxième chapitre de cette thèse.

Revenons aux mots de Dyck généralisés (les marches sur $\mathbb{N}$ avec un ensemble finis de sauts). Notons que tous les auteurs qui ont cherché une grammaire explicite pour ces langages ont abouti à la même grammaire, essentiellement dictée par la méthode de Schützenberger (décomposition par le dernier passage). L'état de la discussion précédente est ainsi résumé par le résultat suivant.

Théorème 4 (Algébricité des langages de Dyck généralisés). *(Labelle et Yeh, Merlini et al., Duchon) Chaque langage de Dyck généralisé est engendré par une grammaire algébrique.*

Démonstration. Notons $v(a)$ la valuation de la lettre a et posons $c = -\min v(a)$ (resp. $d = \max v(a)$), qui est donc la valeur absolue de la plus petite (resp. grande) valuation possible pour les lettres de l'alphabet du langage de Dyck généralisé considéré. Les florentins ont exhibé la grammaire algébrique non ambigüe[3] suivante, valide pour n'importe quel langage de Dyck généralisé $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} \mathcal{D} = \epsilon + \sum_{v(a)=0} a\mathcal{D} + \sum_{k=1}^{\min(c,d)} \mathcal{L}_k\mathcal{R}_k\,, \\ \mathcal{L}_i = \sum_{v(a)=i} a\mathcal{D} + \sum_{k=i+1}^{d} \mathcal{L}_k\mathcal{R}_{k-i}\,, \\ \mathcal{R}_j = \sum_{v(b)=-j} b\mathcal{D} + \sum_{k=1}^{c} \mathcal{L}_k\mathcal{R}_{k+j}\,, \end{cases}$$

Le langage $\mathcal{L}_k$ correspond aux mots commençant par un saut $> k$ et qui finissent à hauteur k (en restant toujours à hauteur $\geq k$) ; le langage $\mathcal{R}_k$ correspond aux mots commençant à hauteur k et finissant en 0 (et n'étant $< k$ que lors du dernier du saut). L'existence et l'unicité d'une décomposition conforme à cette grammaire découle du seul choix possible pour k : pour n'importe quel mot (considéré comme dessin dans le réseau $\mathbb{N}^2$), k doit être égal à la hauteur du point (exceptés les extrémités) le plus « bas » de la marche (en prenant celui qui soit le plus à gauche s'il y en a plusieurs). $\square$

La grammaire est fortement connexe et contient $\Theta(c^2+d^2)$ règles de dérivations et $c+d+1$ non terminaux. Notons que la grammaire peut être « compactée » en une grammaire avec $\min(c,d)$ non-terminaux ; ainsi, quand $c=1$ ou $d=1$, on retrouve les grammaires classiques à un terminal des langages de Łukasiewicz (Dyck, Motzkin,...).

Dyck $(-1,+1)$:	Motzkin $(-1,+0,+1)$:	$(-2,-1,+1)$:	$(-2,-1,+1,+2)$:
$\mathcal{D} = \epsilon + \mathcal{L}_1\mathcal{R}_1$	$\mathcal{D} = \epsilon + 0\mathcal{D} + \mathcal{L}_1\mathcal{R}_1$	$\mathcal{D} = \epsilon + \mathcal{L}_1\mathcal{R}_1$	$\mathcal{D} = \epsilon + \mathcal{L}_1\mathcal{R}_1 + \mathcal{L}_2\mathcal{R}_2$
$\mathcal{R}_1 = 1\mathcal{D}$	$\mathcal{L}_1 = 1\mathcal{D}$	$\mathcal{L}_1 = 1\mathcal{D}$	$\mathcal{L}_1 = 1\mathcal{D} + \mathcal{L}_2\mathcal{R}_1$
$\mathcal{R}_1 = \overline{1}\mathcal{D}$	$\mathcal{R}_1 = \overline{1}\mathcal{D}$	$\mathcal{R}_1 = \overline{1}\mathcal{D} + \mathcal{L}_1\mathcal{R}_2$	$\mathcal{L}_2 = 2\mathcal{D}$
		$\mathcal{R}_2 = \overline{2}\mathcal{D}$	$\mathcal{R}_1 = \overline{1}\mathcal{D} + \mathcal{L}_1\mathcal{R}_2$
			$\mathcal{R}_2 = \overline{2}\mathcal{D}$

Ici, les lettres $0, 1, 2, \overline{1}, \overline{2}$ codent les sauts $\{+0, +1, +2, -1, -2\}$. Seules les deux grammaires de gauches peuvent être récrites avec un seul non-terminal.

À partir du théorème 4, un calcul d'élimination (par résultants ou bases de Gröbner) fournit une forme du polynôme bivariée annulé par la série génératrice des langages de Dyck généralisés. Cependant, le calcul « perd » de la structure. En revanche, la méthode du noyau s'applique fort bien à ce cas et fournit une forme factorisée précieuse.

Théorème 5 (Formule analytique pour l'algébricité des langages de Dyck généralisés). *Chaque langage de Dyck généralisé a une série génératrice $F(z)$ algébrique et exprimable*

[3] Aucune ambigüité sur l'emplacement du tréma, j'ai pour moi le soutien du Haut Comité de la langue française et une publication au Jounal Officiel...

comme produit

$$F(z) = \frac{(-1)^{c+1}}{p_{-c} z} \prod_{i=1}^{c} u_i(z)\,,$$

où les u_i sont les petites branches du noyau $1 - zP(u) = 0$.

DÉMONSTRATION. Avec le point de vue marche, nul besoin d'exhiber de grammaire : chaque mot peut trivialement être considéré comme une excursion pour la marche sur $\mathbb{N}$ dont $\{n_i\}$ est exactement l'ensemble des sauts possibles et notre théorème 2 affirme alors que les excursions sur $\mathbb{N}$ à sauts bornés ont une série génératrice algébrique. Cette dernière méthode donne surtout un accès plus direct à la structure algébrique et analytique de la série génératrice, à savoir son expression comme produit des petites branches, comme illustré ci-dessous. □

P. Duchon [**48**] donne une jolie forme close dans le cas particulier $D_{3/2}$ des mots de Dyck sous une pente $3/2$ (son ensemble $D_{\alpha/\beta}$ correspond à nos excursions de marches à pas $+\beta$ et $-\alpha$) :

$$f_n = \sum_i \frac{1}{5n+i+1} \binom{5n+1}{n-i} \binom{5n+2i}{i}.$$

On peut plus généralement appliquer l'inversion de Lagrange aux formules de noyau récrit sous la forme $u = z^{1/c}(1+u^{c+d})^{1/c}$. Pour les Dyck généralisés à deux lettres (*i.e.* de type $\{-c, d\}$), on dispose ainsi d'une forme pour le dénombrement comme convolution de $(c-1)$ coefficients binomiaux et nous verrons au chapitre 4 que l'asymptotique est en $\left(\frac{c^c d^d}{(c+d)^{c+d}}\right)^{-n} n^{-3/2}$.

Exemple 7. *Chemins « super Dyck » à pas* $(-1, +2)$
Le noyau $K(z,u) = u - z(1+u^3)$ a une petite racine $u_1(z)$ et

$$F(z,u) = \frac{(u - u_1(z))}{u - z(1+u^3)}\,.$$

■

Exemple 8. *Chemins « hyper Dyck » à pas* $(-2, +1)$
Le noyau $K(z,u) = u^2 - z(1+u^3)$ a deux petites racines $u_1(z)$ et $u_2(z)$ et

$$F(z,u) = \frac{(u - u_1(z))(u - u_2(z))}{u^2 - z(1+u^3)}\,.$$

■

Exemple 9. *Chemins « méga Dyck » à pas* $(-2, -1, +1, +2)$
Le noyau $K(z,u) = u^2 - z(1+u+u^3+u^4)$ a deux petites racines et

$$F(z,u) = \frac{(u - u_1(z))(u - u_2(z))}{u^2 - z(1+u+u^3+u^4)}\,.$$

En faisant de l'élimination (base de Gröbner ou résultant), on obtient l'équation suivante pour $F(z,u)$:

$$1 + (2zu - 1 + 4zu^2 - 2z)F + z(-u + 2 + 6u^3 z + 6u^4 z - 4u^2 - 3zu^2 + 3z)F^2 +$$
$$z(2zu - 1 + 4zu^2 - 2z)(u^4 z + u^3 z + zu + z - u^2)F^3 + z^2(u^4 z + u^3 z + zu + z - u^2)^2 F^4 = 0\,,$$

en particulier, on obtient pour les excursions

$$1-(1+2z)F(z,0)+z(2+3z)F(z,0)^2-z^2(1+2z)F(z,0)^3+z^4F(z,0)^4=0$$

et pour les chemins

$$1+(4z-1)F(z,1)+3z(4z-1)F(z,1)^2+z(4z-1)^2F(z,1)^3+z^2(4z-1)^2F(z,1)^4=0$$

Ces équations algébriques étant résolubles par radicaux, on a, en posant $\Delta=\sqrt{1-4z}$,

$$F(z,1)=-\frac{1}{4z}-\frac{1}{4z\Delta}+\frac{1}{4z}\sqrt{2\frac{1+6z}{1-4z}+\frac{2}{\Delta}}$$

et

$$F(z,0)=\frac{1+2z}{4z^2}+\frac{\Delta}{4z^2}-\frac{1}{4z^2}\sqrt{2(1-6z^2)-2(1+2z)\Delta}\,.$$

■

Dans les sections 4.4 et 4.5 suivantes, nous illustrons deux utilisations de la méthode du noyau pour « expliciter » des séries génératrices bi- ou tri- variées de marches en fonction de paramètres particuliers.

4.4. Série génératrice pour les effleurements. Commençons en premier lieu par donner deux petits résultats d'ordre combinatoire. Voici comment obtenir la série génératrice avec une contrainte de positivité stricte :

Proposition 6 (Chemins sur $\mathbb{N}^+$). *La série génératrice $F_{\mathbb{N}^+}$ des chemins sur $\mathbb{N}^+$, (aussi dits strictement positifs,* i.e. *partant de 0, puis toujours >0) est donnée par*

$$F_{N^+,0}=\frac{F_{\mathbb{N}}}{F_{\mathbb{N},0}}-1$$

où $F_{\mathbb{N}}$ est la série génératrice des marches sur $\mathbb{N}$ (déterminée par $F(z,1)$ au théorème 3) et où $F_{\mathbb{N},0}$ est la série génératrice des excursions sur $\mathbb{N}$ (déterminée par F(z,0) au théorème 2).

Démonstration. Soit $F_{\mathbb{N}^+}(z)=\sum_{n\geq 0}f_n^+z^n$ la série génératrice des marches sur $\mathbb{N}^+$. L'ensemble des marches de longueur $n+1$ sur $\mathbb{N}^+$ (c'est-à-dire qui n'ont jamais touché la droite $y=0$) est l'ensemble de toutes les marches de longueur $n+1$, moins celles qui ont touché la dernière fois l'axe au bout de n pas, moins celles qui ont touché la dernière fois l'axe au bout de $n-1$ pas, …, moins celles qui ont touché la dernière fois l'axe lors du premier pas. Ce qui s'écrit aussi : $f_{n+1}^+=f_{n+1}-e_{n+1}-e_nf_1^+-e_{n-1}f_2^+-\cdots-e_1f_n^+$. En multipliant par z^{n+1}, en sommant pour $n>0$, et en ajoutant $f_0^+=0$ et $zf_1^+=z(f_1-e_1)$, on obtient :

$$F_{\mathbb{N}^+}=z(f_1-e_1)+(F-f_0-zf_1)-(E-e_0-ze_1)+\sum_{n\geq 1}z^{n+1}\sum_{k=1}^{n}e_kf_{n+1-k}^+$$

$$F_{\mathbb{N}^+}=F-E+z^2\sum_{n\geq 1}z^{n-1}[z^{n-1}]\frac{E-e_0}{z}\frac{F_{\mathbb{N}^+}-f_0^+}{z}=F-E-(E-e_0)F_{\mathbb{N}^+}$$

$$F_{\mathbb{N}^+}=\frac{F-E}{E-e_0+1}$$

et on conclut car $e_0=1$. Ce n'est rien d'autre qu'une preuve à l'ancienne (*i.e.* via les coefficients) de l'identité de séries génératrices $F=E.F_{\mathbb{N}^+}+E$, que la méthode symbolique prouve en disant qu'une marche est soit une excursion suivie de quelques pas, soit une simple excursion. □

Pour les marches de Dyck (voir l'example 4), on obtient bien sûr $F_{\mathbb{N}^+} = z^2 F$.

Voici maintenant l'équivalent pour les excursions :

Proposition 7 (Excursions sur $\mathbb{N}^+$). *La série génératrice $F_{\mathbb{N}^+,0}$ des excursions sur N^+, (i.e. toujours > 0, sauf pour le premier et le dernier pas où on est en 0, on appelle parfois de tels chemins des « arches ») est donnée par*

$$F_{\mathbb{N}^+,0} = 1 - \frac{1}{F_{\mathbb{N},0}}$$

où $F_{\mathbb{N},0}$ est la série génératrice des excursions sur $\mathbb{N}$ (déterminée par $F(z,0)$ au théorème 2).

Démonstration. Cela découle simplement du fait que les excursions sur $\mathbb{N}$ (désignons leur ensemble par $\mathcal{E}$) sont constituées d'une suite d' « arches » (désignons leur ensemble par $\mathcal{E}^+$, ce sont bien sûr les excursions sur $\mathbb{N}^+$) $\mathcal{E} = Seq(\mathcal{E}^+) \Longrightarrow F_{\mathbb{N}}(z,0) = \frac{1}{1-F_{\mathbb{N}^+,0}(z)}$. □

Nous appellerons « effleurement » le fait de passer par l'origine. Avec le théorème ci-dessus, il est immédiat d'expliciter la série génératrice bivariée donnant le nombre de marches de longueur n (codée par la variable z) ayant k effleurements (codés par la variable t), c'est $\frac{1}{1-tF_{\mathbb{N}^+,0}(z)}$. Nous allons voir que la méthode du noyau nous permet d'aller plus loin que la combinatoire de base (qui marche bien ici car on a une forte structure découlant des excursions) et qu'elle nous fait accéder à la série génératrice *trivariée* des chemins (longueur, effleurements, altitude finale).

Théorème 6 (Effleurements des chemins sur $\mathbb{N}$). *La série génératrice trivariée des chemins sur $\mathbb{N}$ (où u marque l'altitude, t le nombre de passage par zéro et z la longueur) est algébrique et est donnée par*

$$F(z,u,t) = \frac{F(z,u)}{t + (1-t)F(z,0)} = \frac{1}{t+(1-t)F(z,0)} \frac{\prod_{i=1}^{c}(u - u_i(z))}{K(z,u)}$$

où $F(z,u) = F(z,u,1)$ est la série génératrice algébrique bivariée et $K(z,u) = u^c - zu^c P(u)$ le « noyau », tous deux définis au théorème 1.

Démonstration. Voici une première preuve, qui sert à faire sentir l'expressivité de de la méthode du noyau. La récurrence suivante permet de capter le nombre de passages par 0

$$f_{n+1}(u,t) = \{u^{>0}\}P(u)f_n(u,t) + t\{u^0\}Pf_n(u,t).$$

En effet, on interdit comme précédemment la demi-droite des entiers négatifs, et on marque (par t) chaque passage en 0. On a donc cette fois une récurrence entre $f_{n+1}(u,t)$ et $f_n(u,t)$ qui subit la modification suivante, pour justement tenir compte de ce qui ce passe quand on arrive en u^0 :

$$f_{n+1}(u,t) = P(u)f_n(u,t) - \{u^{<0}\}P(u)f_n(u,t) - [u^0]P(u)f_n(u,t) + t[u^0]P(u)f_n(u,t)$$

$$f_{n+1}(u,t) = P(u)f_n(u,t) + (t-1)[u^0]P(u)f_n(u,t) - \{u^{<0}\}P(u)f_n(u,t)$$

$$(1 - zP(u))\, F(z,u,t) = 1 + z(t-1)\sum_{k=0}^{c} \frac{p_{-k}}{k!} F_k - z\sum_{k=0}^{c-1} r_k(u) F_k$$

où les F_k sont les dérivées k-ièmes de $F(z,u,t)$ en $u=0$, et où les r_k sont des polynômes de Laurent (dont les monômes ont des degrés compris entre $-c+k$ et -1). On résout alors cette équation fonctionnelle comme expliqué précédemment. En effet, en multipliant par u^c, le membre droit est un polynôme de degré c que l'on factorise aisément à l'aide des c racines (convergentes en 0) du noyau, et l'on obtient

$$F(z,u,t) = \left(1 + z(t-1)\sum_{k=0}^{c} \frac{p_{-k}}{k!} F_k(z,0,t)\right) \frac{\prod_{i=1}^{c}(u-u_i(z))}{K(z,u)} = \alpha F(z,u)$$

où α est ce qui est entre parenthèses dans le membre du milieu, c'est-à-dire le coefficient de u^c dans le polynôme que l'on vient de factoriser. Or, d'après la proposition précédente, on a par ailleurs $F(z,0,t) = \frac{1}{1-t\left(1-\frac{1}{F(z,0)}\right)}$ on en déduit donc, en faisant $u=0$ dans la relation ci-dessus, que $\alpha = \frac{1}{t+(1-t)F(z,0)}$; d'où au final

$$F(z,u,t) = \frac{F(z,u)}{t+(1-t)F(z,0)}\,.$$

Une autre preuve (qui n'exploite aucunement la factorisation donnée par la méthode du noyau) repose sur l'argument suivant : un chemin est une excursion suivie d'un « reste » (un bout de marche qui ne repasse jamais par 0), on a donc $F(z,u) = F(z,0) \times R(z,u)$, ce qui mène également à

$$F(z,u,t) = \frac{1}{1-tF_{\mathbb{N}^+,0}(z)} R(z,u) = \frac{1}{1-t(1-1/F(z,0))} \frac{F(z,u)}{F(z,0)}.$$

□

Nous poursuivrons l'étude des effleurements au chapitre 4 dédié à l'asymptotique des marches (nous fournirons le nombre moyen d'effleurements et la loi limite).

Signalons maintenant de jolies identités, qui peuvent être prouvées grâce au concept « d'effleurement » :

Théorème 7 (Lien entre $\mathbb{Z}$-excursions et $\mathbb{N}$-excursions). *Les séries génératrices des $\mathbb{Z}$-excursions et $\mathbb{N}$-excursions sont reliées par les formules suivantes*

$$F_{\mathbb{Z}}(z,0) = 1 + z\frac{d}{dz}\log(F_{\mathbb{N}}(z,0))\,,$$

$$F_{\mathbb{N}}(z,0) = \exp\left(\int_0^z \frac{F_{\mathbb{Z}}(t,0)-1}{t}dt\right)\,.$$

Démonstration. Une preuve immédiate consiste à relire les formules obtenues aux théorèmes précédents. Une preuve combinatoire consiste à observer qu'en décomposant une excursion sur $\mathbb{Z}$ en la scandant par ses minima, on a

($\mathbb{Z}$-excursion non vide)= ($\mathbb{N}$-excursion) $\times$ (arche pointée)

$$F_{\mathbb{Z}} - 1 = F_{\mathbb{N}} \times \Theta F_{\mathbb{N}^+}$$

on obtient ainsi

$$F_{\mathbb{Z}}(z,0) - 1 = F_{\mathbb{N}}(z,0) z\frac{d}{dz}F_{\mathbb{N}^+,0}(z) = z\frac{F'_{\mathbb{N},0}(z)}{F_{\mathbb{N},0}(z)}\,.$$

où $F_{\mathbb{N}^+,0}(z) = 1 - \frac{1}{F_{\mathbb{N},0}(z)}$ est la série génératrice des arches et $F_{\mathbb{N},0}(z)$ la série génératrice des $\mathbb{N}$-excursions. □

Il s'agit là d'une revisitation du lemme cyclique reliée à de nombreuses identités (de Spitzer, de Sparre Andersen, confer l'appendice de Kittel dans [**72**]) qui devrait faire l'objet d'études ultérieures...

4.5. Série génératrice pour la hauteur. On peut bien sûr appliquer les théories voisines des automates finis, des matrices de transfert ou des chaînes de Markov aux marches de hauteur $\leq h$ pour obtenir les séries génératrices sous formes de fractions rationnelles, toutefois ceci implique la résolution de systèmes $h \times h$ (dont l'ordre croît par conséquent avec h) et le calcul de déterminants $h \times h$ « réguliers ». Le théorème suivant montre que l'on peut en fait faire bien mieux :

Théorème 8 (Hauteur des marches). *La série génératrice bivariée $F^{[h]}(z,u)$ des marches de hauteur $\leq h$ s'exprime comme une combinaison linéaire de $c+d$ quotients de déterminants :*

$$F^{[h]}(z,u) = \frac{1}{1-zP(u)} \left(1 - z \sum_{k=0}^{c-1} r_k(u) \frac{\det M_k^{[h]}}{\det M^{[h]}} - z \sum_{j=0}^{d-1} \tilde{r}_{c+j}^{[h]}(u) \frac{\det M_{c+j}^{[h]}}{\det M^{[h]}} \right)$$

avec

$$r_k(u) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{c-k} p_{-i-k} u^{-i} \quad (pour\ 0 \leq k \leq c-1)$$

$$\tilde{r}_{c+j}^{[h]}(u) = \frac{u^h}{(h-j)!} \sum_{i=1}^{d-j} p_{i+j} u^i \quad (pour\ 0 \leq j \leq d-1)$$

et où $M^{[h]}$ et les $M_k^{[h]}$ sont des matrices $(c+d) \times (c+d)$ du type $(r_i(u_j))_{i,j=0..c+d-1}$ (voir formule explicite dans la preuve).

En particulier, la série génératrice des excursions de hauteur $\leq h$ s'exprime comme le quotient de deux déterminants de dimension $(c+d) \times (c+d)$:

$$F^{[h]}(z,0) = \frac{\det M_1^{[h]}}{\det M^{[h]}}.$$

Remarque : la complexité du calcul, en fonction de la hauteur h, est de $(c+d)^3 = O(1)$ opérations sur des polynômes, elle est donc indépendante de h.

DÉMONSTRATION. Soit $f_n^{[h]}(u)$ le polynôme codant (en fonction de leur altitude finale) le nombre de marches sur $\mathbb{N}^+$ de longueur n et de hauteur bornée par h. On a donc (pour $h \geq c+d$)

$$f_{n+1}^{[h]} = P f_n^{[h]} - \{u^{<0}\} P f_n^{[h]} - \{u^{>h}\} P f_n^{[h]}.$$

$$(1 - zP(u))\, F^{[h]}(z,u) = 1 - z \left(\sum_{k=0}^{c-1} r_k(u) \partial_u^k F^{[h]}(z,0) + \sum_{k=0}^{d-1} \tilde{r}_k^{[h]}(u) \partial_u^{h-k} F^{[h]}(z,0) \right). \tag{7}$$

Il faut bien sûr lire $\partial_u^k F^{[h]}(z,0)$ comme la dérivée k-ième de $F(z,u)$ (par rapport à u) évaluée en $u=0$. On a donc une équation avec $c+d$ inconnues (les $\partial_u^k F^{[h]}(z,0)$) et l'annulation du noyau $1-zP$ fournit justement $c+d$ racines. (Remarque : la condition $h \geq c+d$ garantit que les dérivées d'ordre $h-k$ de la deuxième somme n'interfèrent pas avec les dérivées d'ordre k de la première somme. Pour les petites valeurs de h, et pour un $k < c$ donné, il faut simplement additionner le coefficient $r_k(u)$ de la k-ième dérivée de la première somme et l'éventuel $\tilde{r}_k^{[h]}(u)$ de la deuxième somme, en cas de téléscopage, pour obtenir les « bons » r_k.)

Notons que la substitution dans l'équation fonctionnelle de u par une série (de Puiseux) de valuation négative est licite car $F^{[h]} \in \mathbb{C}[[z]][u]$ donc $F^{[h]}(z,u)$ (et ses dérivées par rapport à u !) sont en fait des polynômes en u (de degré borné par h).

Notons $\partial_u^k F^{[h]}$ la k-ième dérivée en u évaluée en $u = 0$ de $F(z,u)$. Ainsi, en injectant chacune des $c+d$ racines dans les deux membres, on a donc le système suivant :

$$\begin{pmatrix} r_0(u_1) & r_1(u_1) & \dots & r_{c-1}(u_1) & \widetilde{r}^{[h]}_{d-1}(u_1) & \dots & \widetilde{r}^{[h]}_0(u_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ r_0(u_c) & r_1(u_c) & \dots & r_{c-1}(u_c) & \widetilde{r}^{[h]}_{d-1}(u_c) & \dots & \widetilde{r}^{[h]}_0(u_c) \\ r_0(u_{c+1}) & r_1(u_{c+1}) & \dots & r_{c-1}(u_{c+1}) & \widetilde{r}^{[h]}_{d-1}(u_{c+1}) & \dots & \widetilde{r}^{[h]}_0(u_{c+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ r_0(u_{c+d}) & r_1(u_{c+d}) & \dots & r_{c-1}(u_{c+d}) & \widetilde{r}^{[h]}_{d-1}(u_{c+d}) & \dots & \widetilde{r}^{[h]}_0(u_{c+d}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_u^0 F^{[h]} \\ \vdots \\ \partial_u^{c-1} F^{[h]} \\ \partial_u^{h-d+1} F^{[h]} \\ \vdots \\ \partial_u^h F^{[h]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} \\ \vdots \\ \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z} \\ \vdots \\ \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

On voit clairement apparaître la structure $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ de la matrice où les blocs A et C correspondent aux c premières dérivées et où les blocs B et D correspondent aux d autres dérivées (d'ordre $h-d+1$ à h).

L'application de la règle de Cramer donne ainsi chacune des dérivées comme $\dfrac{\det M_k^{[h]}}{\det M^{[h]}}$, où $M^{[h]}$ est la matrice du système ci-dessus et où $M_k^{[h]}$ est $M^{[h]}$ dont tous les éléments de la k-ième colonne ont été remplacés par $\frac{1}{z}$. On a notamment

$$F^{[h]}(z,0) = \frac{\det M_1^{[h]}}{\det M^{[h]}}.$$

En injectant les valeurs alors obtenues dans l'équation fonctionnelle (7) ci-dessus, on obtient le résultat énoncé. □

Dans certains cas, on a une grande simplification. Notamment, pour les marches associées aux arbres $(t+1)$-aires (les excursions à sauts -1 et $+t$), et plus généralement quand $c = 1$, on a

$$F^{[h]}(z,0) = \frac{(h-d)!}{h!} \frac{(-1)^{d+1}}{z} \frac{\det M^{[h-1]}}{\det M^{[h]}}$$

En effet, on a alors

$$M^{[h]} = \begin{pmatrix} p_{-1}/u_1 & \widetilde{r}^{[h]}_{d-1}(u_1) & \dots & \widetilde{r}^{[h]}_0(u_1) \\ p_{-1}/u_{c+1} & \widetilde{r}^{[h]}_{d-1}(u_{c+1}) & \dots & \widetilde{r}^{[h]}_0(u_{c+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{-1}/u_{c+d} & \widetilde{r}^{[h]}_{d-1}(u_{c+d}) & \dots & \widetilde{r}^{[h]}_0(u_{c+d}) \end{pmatrix}$$

En multipliant la première ligne de $M^{[h]}$ par u_1, la deuxième par u_2,..., la dernière par u_{c+d}, et en multipliant la première colonne par $1/(p_{-1}z)$, puis les autres par $\frac{1}{h+1-d+1}$, $\frac{1}{h+1-d+2}$, $\dots$, $\frac{1}{h+1}$, on voit que

$$\frac{(h+1-d)!\, u_1 u_2 \dots u_{c+d}}{(h+1)!\, p_{-1} z} \det M^{[h]} = \det M_1^{[h+1]}.$$

D'où, puisque le produit des racines se simplifie,

$$\det M_1^{[h]} = \frac{(h-d)!}{h!}\frac{(-1)^{d+1}}{z}\det M^{[h-1]}\,.$$

On retrouve ainsi, dans le cas très particulier où $c = 1$, une relation qui généralise celle de De Bruijn, Knuth et Rice [**41**] :

$$F^{[h]}(z,0) = \frac{(h-d)!}{h!}\frac{(-1)^{d+1}}{z}\frac{\det M^{[h-1]}}{\det M^{[h]}}$$

et en factorisant chaque ligne de $M^{[h]}$ par u_k^h, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} F^{[h]}(z,0) &= \frac{(h-d)!}{h!}\frac{(-1)^{d+1}}{z}\frac{(-1)^{c+d}}{u_1\dots u_{c+d}}\frac{\sum_{k=1}^{c+d}(-1)^{k+1}u_k^{-h-1}\Delta_k}{\sum_{k=1}^{c+d}(-1)^{k+1}u_k^{-h}\Delta_k} \\ &= \frac{(h-d)!}{h!}\frac{(-1)^{c+1}}{zp_{-c}}\frac{\sum_{k=1}^{c+d}(-1)^{k+1}u_k^{-h-1}\Delta_k}{\sum_{k=1}^{c+d}(-1)^{k+1}u_k^{-h}\Delta_k} \end{aligned}$$

où les Δ_k sont les mineurs, indépendants de h.

5. Marches en dimension 2

Cette section doit être considérée par le lecteur comme une section « prospective » où l'on suggère quelques extensions de la méthode du noyau à des marches qui ressemblent suffisamment à des marches sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$.

5.1. Algébricité des marches dirigées sur $\mathbb{N}^2$. Nous appelons marche dirigée une marche dont tous les sauts ont leur première coordonnée positive La marche se fait donc globalement dans une « direction » particulière (ici, vers la droite) et seule l'une des deux contraintes de positivité joue : la barrière constituée par l'axe des abscisses. Ces marches sont en fait très proches d'une marche unidimensionnelle, ce que/qui justifie un peu le théorème suivant :

Théorème 9 (Algébricité des marches bidimensionnelles dirigées). *Les marches sur $\mathbb{N}^2$ dirigées ont une série génératrice trivariée $F(z,u,v)$ algébrique (z code la longueur, u la position finale en abscisse, v la position finale en ordonnée).*

DÉMONSTRATION. Il suffit de reprendre la décomposition par le point le plus bas (hormis les extrémités) on a donc une grammaire algébrique non-ambigüe[4] (où chaque lettre donne lieu à codage du type $u^i v^j$), et on a par conséquent une série génératrice $F(z,u,v)$ algébrique. □

Il s'agit en fait exactement de marches unidimensionnelles où l'attribut de déplacement selon l'axe des x est une fonctionnelle linéaire des pas de forme $c(w) = \sum \lambda_j |w|_{b_j}$, où les b_j sont les sauts. De même au plan des langages où la reconnaissance se fait en ignorant l'information selon l'axe des x.

Exemple 10. *Marches de cavalier d'un coin à l'autre d'un échiquier*
Dans [**89**] et [**90**], Jacques Labelle et Yeong-Nan Yeh ont donné la série génératrice d'une marche de Dyck « modifiée » pour laquelle on ne considère plus des pas « nord-est » et « sud-est » comme c'est le cas traditionnellement mais des pas « de cavalier d'échecs ». Leur méthode consiste à trouver une décomposition astucieuse de telles marches, ils arrivent ainsi à six langages dont ils trouvent les séries génératrices, puis ils en déduisent la série génératrice des marches de cavaliers. Ils appliquent ensuite formellement la même idée à un cavalier qui n'aurait plus des pas $(1,2)$ mais des pas (r,s).

Nous allons présenter ici une alternative à la solution de Labelle et Yeh. En effet, notre façon de traiter les marches aléatoires s'applique pleinement ici et de plus, elle nous permet de coller plus précisément à la « structure » de ce problème. Nous pouvons ainsi étudier à loisir différents paramètres.

On considère un échiquier $m \times \infty$ (i.e. de hauteur non bornée et de largeur m). De combien de manières peut-on rejoindre le coin sud-ouest de coordonnées $(0,0)$ au coin sud-est de coordonnées $(m,0)$ par des mouvements de cavalier « gauche-vers-droite », c'est-à-dire de type $(1,2)$, $(1,-2)$, $(2,1)$, $(2,-1)$? La règle du jeu est donc qu'on ne peut pas déborder vers le bas.

Nous allons en fait tout de suite regarder la série génératrice de la marche. Le polynôme caractéristique de cette marche est $P(u,v) := uv^2 + uv^{-2} + u^2v + u^2v^{-1}$. Soit $f(u,v)$ un

[4] Voir la note en bas de la page 33.

polynôme de Laurent, on note

$$\{u^{<0}v^{<0}\}f := \left(\sum_{j<0}\sum_{i\geq 0} + \sum_{i<0}\sum_{j\geq 0} + \sum_{i<0}\sum_{j<0}\right) u^i v^j [u^i v^j] f(u,v).$$

On a

$$f_{n+1}(u,v) = P(u,v)f_n(u,v) - \{u^{<0}v^{<0}\}P(u,v)f_n(u,v)$$

comme on ne fait qu'avancer en u, la contrainte $u^{\geq 0}$ ne joue pas et on a :

$$f_{n+1}(u,v) = P(u,v)f_n(u,v) - \{v^{<0}\}(uv^{-2} + u^2v^{-1})f_n(u,v)$$

or, comme les seules puissances négatives de v qui interviennent sont v^{-1} et v^{-2}, on a

$$f_{n+1}(u,v) = P(u,v)f_n(u,v) - (v^{-1}[v^{-1}] + v^{-2}[v^{-2}])(uv^{-2} + u^2v^{-1})f_n(u,v)$$

en distribuant l'opérateur d'extraction des coefficients :

$$f_{n+1} = Pf_n - v^{-1}[v^{-1}]uv^{-2}f_n - v^{-1}[v^{-1}]u^2v^{-1}f_n - v^{-2}[v^0]uf_n$$

d'où

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u,v) &= P(u,v)f_n(u,v) - v^{-1}[v^1]uf_n(u,v) - v^{-1}[v^0]u^2f_n(u,v) - v^{-2}[v^0]uf_n(u,v) \\ & P(u,v)f_n(u,v) - uv^{-1}[v^1]f_n(u,v) - (u^2v^{-1} + uv^{-2})[v^0]f_n(u,v) \end{aligned}$$

puis, en multipliant par z^{n+1} et en sommant pour n allant de 0 à $+\infty$, puis en ajoutant $f_0(u,v)$

$$F(z,u,v) = 1 + z\big(P(u,v)F(z,u,v) - uv^{-1}\partial_v F(z,u,0) - (u^2v^{-1} + uv^{-2})F(z,u,0)\big)$$

Ainsi, en regroupant les $F(z,u,v)$ à gauche puis en multipliant par v^2, on obtient :

$$F(z,u,v)\big(v^2 - z(uv^4 + u + u^2v^3 + u^2v)\big) = v^2 - uv\partial_v F(z,u,0) - (u^2v + u)F(z,u,0)$$

En notant v_1 et v_2 les deux solutions de

$$v^2 = zv^2P(u,v)$$

qui tendent vers 0 quand z tend vers 0, à savoir

$$\begin{cases} v_1(z,u) := -\dfrac{z\,u^2 - \Delta}{4zu} - \dfrac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{u^3z - u\Delta + 2 - 4zu}{zu}} = +\sqrt{z}\sqrt{u} + \cdots \\ v_2(z,u) := -\dfrac{z\,u^2 + \Delta}{4zu} + \dfrac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{u^3z + u\Delta + 2 - 4zu}{zu}} = -\sqrt{z}\sqrt{u} + \cdots \end{cases}$$

où $\Delta := \sqrt{z^2u^4 + 4zu + 8z^2u^2}$. On peut alors résoudre le système

$$\begin{cases} v_1^2 - uv_1\partial_v F(z,u,0) - (u^2v_1 + u)F(z,u,0) = 0 \\ v_2^2 - uv_2\partial_v F(z,u,0) - (u^2v_2 + u)F(z,u,0) = 0 \end{cases}$$

Cela donne

$$\begin{cases} \partial_v F(z,u,0) = \frac{v_1 + v_2 + uv_1v_2}{zu} \\ F(z,u,0) = -\frac{v_1v_2}{zu} \end{cases}$$

d'où, au final :

$$F(z,u,v) = \frac{(v - v_1(z,u))(v - v_2(z,u))}{v^2 - z(u^2v^3 + uv^4 + u + u^2v)}.$$

Nous ne donnons pas la forme close obtenue par substitution des formes closes de v_1 et v_2 car celle-ci n'est pas très « compacte ».

On peut maintenant retourner à la question initiale, « déterminer le nombre de chemins allant de $(0,0)$ à $(m,0)$ » ; la suite recherchée est donnée par

$$a_m = [u^m v^0]F(1,u,v).$$

Ainsi la série génératrice est (suite `EIS A005220`) :

$$E(u) := F(1,u,0) = -\frac{v_1(1,u)v_2(1,u)}{u} = 1 + u^2 + 3u^4 + 2u^5 + 12u^6 + O(u^8).$$

En calculant le résultant de $uE + v_1v_2$, $v_1^2 - (u^2v_1^3 + u^2v_1 + u + uv_1^4)$ et $v_2^2 - (u^2v_2^3 + u^2v_2 + u + uv_2^4)$ par rapport à v_1 et v_2 et en factorisant le résultat, on obtient que la fonction E vérifie l'équation

$$u^8(uE+1)^4(u^4E^4+2u^2E^3+u^5E^3+E^2+2u^2E^2-2E^2u^4+2E+u^3E+1)(1-E-2uE+2uE^2+2u^2E^2+E^2u^4-u^2E^3-2u^3E^3+u^4E^4) = 0.$$

On trouve aisément le « bon » facteur (puisqu'il faut que le résultat soit cohérent avec $E(0) = 1$) et ainsi E vérifie l'équation (irréductible)

$$1 - E - 2uE + 2uE^2 + 2u^2E^2 + E^2u^4 - u^2E^3 - 2u^3E^3 + u^4E^4 = 0$$

que l'on peut résoudre explicitement et on détermine alors aisément laquelle des 4 racines est la bonne. En posant

$$\Delta := \sqrt{1 - 4u + 4u^2 - 4u^4},$$

on obtient au final et le sourire aux lèvres

$$E(u) := \frac{1 + 2u + \Delta}{4u^2} - \frac{\sqrt{2 + 2\Delta - 4u - (8 + 8\Delta)u^2 + 16u^3 - (8 + 4\Delta)u^4 - 16u^5}}{4u^2\sqrt{\Delta}}.$$

Le paquetage **Gfun** indique que les coefficients vérifient une récurrence d'ordre 19 avec des coefficients polynomiaux de degré 3 qui ne présente pas de structure notable.

Notons, au passage, que l'expression que l'on obtient en faisant $z = 1$ et $v = 0$ dans la forme close donnant $F(z,u,v)$ est bien plus complexe que celle que nous obtenons par ce calcul de résultants (on aurait aussi pu faire de l'élimination par base de Gröbner). Ainsi, faute d'un algorithme puissant de simplification de radicaux (désemboîtage de racines imbriquées[5]), le passage par les résultants reste fort appréciable.

La singularité réelle de plus petit module de $E(u)$ est $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} = 0.36\ldots$. Ainsi, le théorème de Pringsheim (je renvoie à mon mémoire [**4**] pour une preuve basée sur l'inégalité triangulaire, d'après une idée de Pringsheim lui-même) nous donne l'ordre exponentiel

$$a_m \asymp (1 + \sqrt{3})^m \approx 2.73^m.$$

Une analyse de singularité donnerait plus précisément

$$a_m = \frac{A}{\sqrt{\pi} m^{3/2}}(1 + \sqrt{3})^m + O\left(\frac{(1 + \sqrt{3})^m}{m^{5/2}}\right)$$

une forme en accord avec l'aspect général des excursions unidimensionnelles (confer le théorème 2, page 107), et où

$$A = \frac{237 - 137\sqrt{3} - 15\sqrt{-13 + 8\sqrt{3}} + 9\sqrt{-13 + 8\sqrt{3}}\sqrt{3}}{(-1 + \sqrt{3})^2\sqrt{18 - 10\sqrt{3}}(-13 + 8\sqrt{3})} = 0,6703\ldots$$

■

[5] Ce type de simplification de radicaux est parfois appelé « denesting ».

Exemple 11. *Marches qui finissent sur le bord*
Voici une question parallèle à celle du paragraphe précédent : *on considère l' « échiquier infini » $\mathbb{N}^2$. Combien de suites de n mouvements de cavalier (sauts $(+1,+2)$, $(+1,-2)$, $(+2,-1)$ et $(+2,+1)$) sont-elles possibles, qui partent de $(0,0)$ et qui reviennent sur la ligne de base $y=0$, en conservant une abscisse positive ou nulle ?*

La suite recherchée est donnée par $b_n = [z^n v^0]\, F(z,1,v)$.
Ainsi la série génératrice est

$$E(z) := F(z,1,0) = -\frac{v_1(z,1)v_2(z,1)}{z} = 1 + 2z^2 + 2z^3 + 11z^4 + 24z^5 + 93z^6 + O(z^8)$$

Bon vous connaissez la suite ; on calcule le résultant de $zE + v_1v_2$, $v_1^2 - z(v_1^3 + v_1 + 1 + v_1^4)$ et $v_2^2 - z(v_2^3 + v_2 + 1 + v_2^4)$ par rapport à v_1 et v_2. En factorisant le résultat obtenu, on trouve que la fonction E vérifie l'équation

$$z^8(1+zE)^4(1+2E+zE+E^2+2z^2E^3+E^3z^3+E^4z^4)(1-E-2zE+2zE^2+3z^2E^2-z^2E^3-2E^3z^3+E^4z^4)^2 = 0.$$

On trouve aisément le « bon » facteur (car $E(0)=1$) et ainsi E vérifie

$$1 - E - 2zE + 2zE^2 + 3z^2E^2 - z^2E^3 - 2E^3z^3 + E^4z^4 = 0$$

que l'on peut résoudre explicitement et alors déterminer laquelle des 4 racines est la bonne. Nous faisons la même remarque que précédemment, à savoir qu'il vaut mieux appliquer les formules de Ferrari sur un polynôme le plus « simple » possible, afin d'obtenir une forme close « compacte » sans avoir à faire du denesting[6], c'est pour cette raison que nous sommes encore passés par un calcul de résultants.

On obtient, en notant $\Delta := \sqrt{1-4z}$,

$$E(z) := \frac{1+2z+\Delta}{4z^2} - \frac{\sqrt{2+2\Delta-4z-16z^2-12\Delta z^2}}{4z^2\sqrt{\Delta}}.$$

Les singularités réelles sont $\frac{1}{4}$ et $-\frac{4}{9}$, ainsi le théorème de Pringsheim nous donne

$$b_n \asymp 4^n.$$

Une analyse de singularité donne

$$b_n = \frac{A}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}4^n + O\left(\frac{4^n}{n^{5/2}}\right)$$

avec $A = \frac{6}{\sqrt{5}} - 2 = 0,6832\ldots$ ∎

Exemple 12. *Marches de Pascal de pente* $1/m$
Si l'on s'autorise un pas vers le haut et un pas vers la droite et pour lequel on se limite à droite par $y = x$, on aboutit à

$$F(z,u)\big(1 - z(u^{-1}+u)\big) = 1 - z\{u^{<0}\}\sum_{n\geq 0} P(u)z^n f_n(u)$$

donne

$$F(z,u)\big(u - z(1+u^2)\big) = u - zF(z,0).$$

[6]Voir la note de la page 44.

Triangle de Pascal de paramètre $\frac{1}{2}$ (même récurrence, mais limité par la droite $y = x/2$) :

$$\begin{array}{cccccc} & & & & 3 & 7 \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

La récurrence du triangle de Pascal de paramètre $\frac{1}{m}$ est

$$f_0(u) = f_1(u) = 1,$$

$$f_n(u) = (1+u)f_{n-1}(u) \quad \text{si} \quad n \bmod m = 0,$$

$$f_n(u) = (1+u)f_{n-1}(u) - \{u^{\lfloor n/m \rfloor + 1}\}(1+u)f_{n-1}(u) \text{ sinon.}$$

On obtient des séries génératrices $F(z,u)$ algébriques dont l'équation est remarquable :

$$-1 - uz^m F^m + \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m-1}{k-1} z^{k-1} - \binom{m}{k} z^k \right) F^k = 0\,.$$

$F(z,u)$ vérifie par ailleurs une équation différentielle sans structure notable d'ordre $m-1$ et à coefficients de degré $\leq 4m$ en z et $\leq 4m$ en u ; pour $m=2$, on a ainsi $F(z,u) = \frac{1}{2}\frac{1-2z-\sqrt{1-4uz^2}}{(1+u)z^2-z}$.

■

Toujours dans ces variations autour de la méthode du noyau, citons l'étude de la marche dans $\mathbb{Z}^2$ à sauts $+1$ ou -1 dans chaque direction et évitant l'axe réel négatif par G. Schaeffer et M. Bousquet-Mélou [**29**]. La série génératrice est algébrique. Les auteurs ont notamment étudié la distribution du temps d'atteinte de cette droite. Plus récemment encore, citons M. Durand [**51**] qui a étudié les marches contraintes à évoluer dans un secteur prédéfini (par exemple entre $y = x$ et $y = x/3$ et en imposant la valeur 1 comme condition de bord sur les droites en questions), il apparaît que l'on aboutit encore à des séries génératrices algébriques.

5.2. D-finitude des marches du plan finissant sur la diagonale.

Théorème 10 (Algébricité des marches finissant sur la diagonale). *Pour toute marche à sauts bornés dans $\mathbb{Z}^2$, la série génératrice bivariée $F(z,v)$ du nombre des marches allant de l'origine à la diagonale est algébrique (z code la longueur et v la hauteur finale).*

Démonstration. En effet, la série génératrice classique $F(z,u,v) = \frac{1}{1-zP(u,v)}$ est rationnelle (car il n'y a pas de contrainte de positivité) et la série génératrice des marches finissant sur la diagonale s'obtient précisément par une diagonale. Par la formule « de la diagonale de Hadamard », on a :

$$\mathrm{Diag}_{\mathrm{u,v}}\, F(z,u,v) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma F(z,u,\frac{v}{u})\,\frac{du}{u}.$$

Définissons A et B (deux polynômes) par $\frac{A}{B} = F(z,u,\frac{v}{u})/u$. Trouver le résidu t d'une telle fraction rationnelle est immédiat car il vérifie le système $\begin{cases} t = \frac{A}{\partial_u B} \\ B = 0 \end{cases}$. Le calcul du résultant de $A - t\partial_u B$ et de B par rapport à u permet même de donner l'équation algébrique vérifiée par ce résidu. (Si l'équation algébrique ainsi obtenu est résoluble, on peut même donner des formes closes pour $\mathrm{Diag}_{\mathrm{u,v}}\, F(z,u,v)$.) □

Exemple 13. *Retours sur la diagonale : le roi et les nombres de Delannoy*
Notons que ce théorème s'applique également à des marches qui évoluent « naturellement » dans le quart de plan, par exemple, la série génératrice des déplacements du roi (contraint de ne pas revenir en arrière ou descendre) est

$$F(z,u,v) = \frac{1}{1 - z\,(u + v + u\,v)}.$$

Si l'on s'intéresse aux marches commençant en $(0,0)$ et finissant sur la diagonale, il faut considérer

$$\frac{A}{B} := F(1,u,\frac{v}{u})/u = \frac{1}{u - u^2 - v - v\,u}$$

Le résultant de $A - t\partial_u B$ et de B vaut $6\,t^2\,v + 1 - t^2 - t^2\,v^2$ dont la résolution donne alors $\pm\frac{1}{\sqrt{1-6\,v+v^2}}$. On retient la racine

$$\frac{1}{\sqrt{1-6\,v+v^2}} = 1 + 3\,v + 13\,v^2 + 63\,v^3 + 321\,v^4 + 1683\,v^5 + \mathrm{O}(v^6).$$

Il s'agit de la suite `(EIS A001850)` des nombres de Delannoy centraux (aussi étudiés par Sulanke dans [**118**]), qui sont donnés par la forme close $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$.

Si l'on souhaite conserver un comptage du nombre de pas, la même technique s'applique, en considérant bien sûr

$$\frac{A}{B} = F(z,u,\frac{u}{v})/v$$

et un nouveau calcul de résultant donne $4\,t^2\,z^3\,v + z - t^2\,z + 2\,t^2\,z^2\,v - t^2\,z^3\,v^2$ ce qui nous permet d'obtenir la forme close

$$\mathrm{Diag_{u,v}}\,F(z,u,v) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\,z\,v - 4\,z^2\,v + z^2\,v^2}}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + (2\,z^2 + z)\,v + (z^2 + 6\,z^4 + 6\,z^3)\,v^2 + (12\,z^4 + z^3 + 20\,z^6 + 30\,z^5)\,v^3 + \\ &\quad (z^4 + 90\,z^6 + 20\,z^5 + 70\,z^8 + 140\,z^7)\,v^4 + \\ &\quad (30\,z^6 + z^5 + 560\,z^8 + 210\,z^7 + 252\,z^{10} + 630\,z^9)\,v^5 + \mathrm{O}(v^6) \end{aligned}$$

■

5.3. Marches non D-finies. Une suite f_n qui vérifie une récurrence linéaire à coefficients constants a une série génératrice rationnelle. Toutefois, ceci ne tient plus en dimension ≥ 2, en effet, une suite vérifiant une récurrence linéaire à coefficients constants peut très bien mener à une série génératrice transcendante. C'est d'ailleurs en recherchant la nature (algébrique ou transcendante), d'une suite dénombrant les marches de cavalier de Petkovšek (voir [**105**]) que Mireille Bousquet-Mélou [**27**] a trouvé que la suite :

$$a_{i,j} := a_{i-2,j+1} + a_{i+1,j-2} + a_{i-1+j-1}$$

avec les conditions de bord suivantes

$$a_{0,i} = a_{1,i} = a_{i,0} = a_{i,1} = 1$$

a une série génératrice non D-finie.

Exemple 14. *Le cavalier de Petkovšek*
La récurrence originale de Petkovšek était

$$a_{i,j} := a_{i-2,j+1} + a_{i+1,j-2}$$

avec les conditions de bord suivantes

$$a_{0,i} = a_{1,i} = a_{i,0} = a_{i,1} = 1.$$

On peut la voir comme une généralisation de la définition du triangle de Pascal. En effet, ici chaque terme du triangle est la somme des voisins des deux nombres situés au dessus et en diagonale (ainsi, à la onzième ligne : $a_{4,7} := a_{5,5} + a_{2,8}$ *i.e.* 22=14+8).

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 1 \quad \mathbf{1}\\
1 \quad 1 \quad \mathbf{1} \quad 1\\
1 \quad 1 \quad \mathbf{2} \quad 1 \quad 1\\
1 \quad 1 \quad \mathbf{2} \quad 2 \quad 1 \quad 1\\
1 \quad 1 \quad \mathbf{3} \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 1\\
1 \quad 1 \quad \mathbf{3} \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 1 \quad 1\\
1 \quad 1 \quad \mathbf{5} \quad 5 \quad 6 \quad 5 \quad 5 \quad 1 \quad 1\\
1 \quad 1 \quad \mathbf{6} \quad 7 \quad 10 \; 10 \quad 7 \quad 6 \quad 1 \quad 1\\
1 \quad 1 \quad \mathbf{8} \;\; 11 \; 16 \; \underline{14} \; 16 \; 11 \quad \underline{8} \quad 1 \quad 1\\
1 \quad 1 \;\; \mathbf{12} \; 17 \; 22 \; 27 \; 27 \; \underline{22} \; 17 \; 12 \quad 1 \quad 1\\
1 \quad 1 \;\; \mathbf{18} \; 23 \; 39 \; 44 \; 44 \; 44 \; 39 \; 23 \; 18 \quad 1 \quad 1\\
1 \quad 1 \;\; \mathbf{24} \; 40 \; 62 \; 67 \; 83 \; 83 \; 67 \; 23 \; 18 \; 24 \quad 1 \quad 1\\
1 \;\; 1 \;\; \mathbf{a_{12,2}} \; a_{11,3} \; a_{10,4} \quad \ldots \; a_{4,10} \; a_{3,11} \; a_{2,12} \;\; 1 \quad 1\\
\vdots
\end{array}$$

Cette récurrence décompte le nombre de façons qu'a un cavalier situé en (i,j) de rejoindre les bords avec des pas $(-2,+1,)$ et $(+1,-2)$, lorsque les bords sont absorbants. Indiquons au passage que les marches absorbantes rentrent dans le cadre de notre méthode : en fait on peut distinguer le cas où l'on compte les marches qui atteignent le bord (et alors il faudrait regarder ce que donne l'équation des effleurements en $t = 0$, voir la section 5 du chapitre 4) du cas où on les rejette, il suffit alors dans la définition par récurrence des f_n de remplacer $\{u^{<0}\}$ par $\{u^{\leq 0}\}$.

Notons $f_n(u)$ le polynôme associé à ligne n du triangle ci-dessus ($f_0(u) = 1, f_1(u) = 1+u, f_4(u) = 1+u+2u^2+u^3+u^4, \ldots$), on a alors la récurrence

$$f_{n+1}(u) = 1 + u + u^n + u^{n+1} + \{u^{<n}\}\{u^{>2}\}(\frac{1}{u} + u^2)f_n(u)\,.$$

Cette récurrence n'est pas homogène en temps (ce qui est une partie de la difficulté ici), mais grâce à la symétrie de la construction, les $[u^{n-2}]f_n(u)$ dont on aurait besoin peuvent se récrire en $[u^2]f_n(u)$ (que nous notons $f_{n,2}(u)$) et on se ramène ainsi à la récurrence

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(u) &= u^2 f_n(u) + u^n - u^{n+2} - u^n f_{n,2}(u) + \frac{1}{u} f_n(u) + 1 + u - \frac{1}{u} - u f_{n,2}(u)\\
&= \left(u^2 + \frac{1}{u}\right) f_n(u) + \left(u + 1 - \frac{1}{u}\right) + u^n(1-u^2) - (u+u^n) f_{n,2}(u)
\end{aligned}$$

qui donne en multipliant par z^{n+1} et en sommant,

$$\left(1 - z(u^2 + \frac{1}{u})\right) F(z,u) = 1 + \frac{z}{1-z}(u + 1 - \frac{1}{u}) + \frac{z(1-u^2)}{1-uz} - uzF_2(z) - zF_2(uz)$$

$F(z,u)$ serait donc algébrique si $F_2(z)$ l'était. Or la méthode du noyau (on a ici une racine $u_1(z)$) ne permet pas de conclure et ne donne que

$$F_2(z) = \frac{1}{u_1 z} + \frac{1 + u_1^{-1} - u_1^{-2}}{1 - z} + \frac{u_1^{-1} - u_1}{1 - u_1 z} - \frac{1}{u_1} F_2(u_1 z)\,.$$

La nature de cette série reste donc un problème ouvert. ■

5.4. Holonomie des marches à sauts bornés en dimension finie. Le credo est ici que « deux contraintes de positivité sur une marche qui serait rationnelle sans ces contraintes donne une marche avec une série génératrice D-finie ».

Théorème 11 (D-finitude des excursions sur $\mathbb{Z}^m$). *Les marches à sauts bornés sur $\mathbb{Z}^m$ ont une série génératrice des excursions $F(z)$ D-finie. (Une excursion est une marche partant de l'origine et y finissant).*

Démonstration. La série génératrice de toutes les marches étant rationnelle : $F(z, u_1, \ldots, u_m) = \frac{1}{1 - zP(u_1, \ldots, u_m)}$, la D-finitude des excursions suit de par l'itération de calcul de diagonale puisqu'il est connu que la diagonale d'une série génératrice rationnelle est algébrique, que la diagonale d'une série génératrice algébrique est D-finie, et que la diagonale d'une série génératrice D-finie reste D-finie. □

Exemple 15. *Marches multidimensionnelles*
Diverses marches aléatoires multidimensionnelles qui, à chaque unité de temps, n'évoluent que dans une seule direction de l'espace ont une série génératrice qui peut être explicitée en ayant recours à une décomposition de la marche en un shuffle de marches unidimensionnelles. D. Gardy dans [**78**] exploite une telle décomposition. Pour le célèbre problème de l'ivrogne de Pólya, le site de S. Finch [**56**] rappelle comment établir les propriétés des probabilités de retour à l'origine.

$$F_{\mathbb{Z}^m}(z) = \mathrm{Diag}_{x_1, \ldots, x_m} \frac{1}{1 - z(x_1 + x_1^{-1} + x_2 + x_2^{-1} + \cdots + x_m + x_m^{-1})}$$

■

Je pense que la D-finitude a même lieu dans un cadre bien plus général, mais les équations fonctionnelles auxquelles j'aboutis avec le point de vue « récurrences » ne me permettent pas pour l'instant de prouver l'assertion suivante :

Conjecture 1 (D-finitude des marches sur $\mathbb{N}^m$). *Les marches à sauts bornés sur $\mathbb{N}^m$ ont une série génératrice $F(z, u_1, \ldots, u_m)$ D-finie.*

L'exemple suivant illustre le théorème 11, et l'exemple d'après illustrera la conjecture ci-dessus, en ayant une approche « mathématiques expérimentales », avec l'aide du package Maple `Gfun` de Bruno Salvy et Paul Zimmermann.

Exemple 16. *Marches sur un réseau hexagonal*
Avec la figure 2 ci-dessous, on voit qu'aller dans l'alvéole supérieure[7] droite correspond à faire un pas $(+1, +2)$ sur un réseau carré. Aller dans l'alvéole supérieure gauche correspond à faire un pas $(-1, +2)$. Aller dans l'alvéole de droite correspond à faire un pas $(+2, +0)$. Aller dans l'alvéole de gauche correspond à faire un pas $(-2, +0)$. Aller dans l'alvéole inférieure droite

[7]Les Académiciennes à la lanterne !

correspond à faire un pas $(+1,-2)$. Aller dans l'alvéole inférieure gauche correspond à faire un pas $(-1,-2)$.

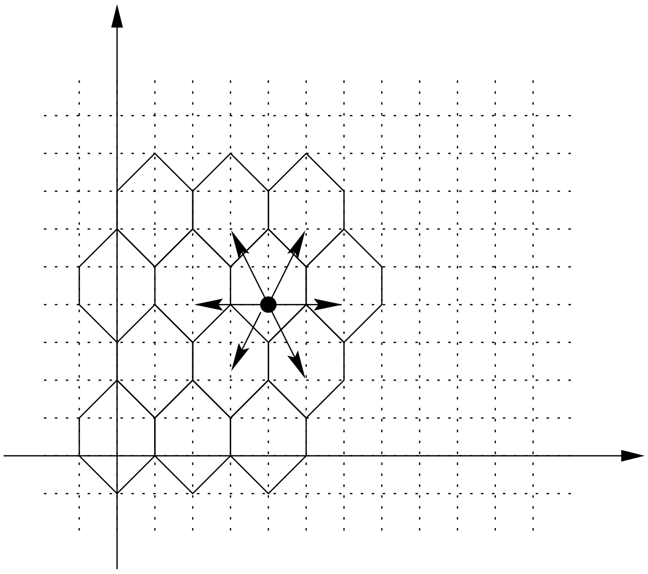


FIG. 2 – Correspondance entre le réseau hexagonal et réseau carré.

Le polynôme caractéristique est donc

$$P(u,v) := uv^2 + uv^{-2} + u^{-1}v^2 + u^{-1}v^{-2} + u^2 + u^{-2}.$$

La série génératrice des marches sur $\mathbb{Z}^2$ est immédiate c'est $\frac{1}{1-6z}$; la série génératrice des excursions sur $\mathbb{Z}^2$ (on part et on finit au point $(0,0)$) donne la suite `EIS A002898` et s'obtient comme

$$F_{\mathbb{Z}^2}(z,0,0) = [u^0][v^0]\frac{1}{1-zP(u,v)} = 1 + 6z^2 + 12z^3 + 90z^4 + 360z^5 + 2040z^6 + O(z^7) \tag{8}$$

La fonction, qui est une double diagonale de fonction rationnelle, est d'après les propriétés de clôture des fonctions D-finies [**91**], une fonction D-finie et elle vérifie l'équation différentielle suivante

$$24z(3z+1)F + (6z+1)(24z^2+8z-1)\partial F + z(6z-1)(2z+1)(3z+1)\partial^2 F = 0\,.$$

Il est assez remarquable que les coefficients soient « friables » (*i.e.* hautement factorisables, voir la figure 16.), ce qui n'est forcément le cas pour les fonctions D-finies d'ordre 2. Le coefficient d'ordre n est « grosso modo » le produit d'un (ou deux) grand nombre premier fois les nombres premiers entre n et $n/2$, fois de très petits nombres premiers.

Les coefficients vérifient la récurrence suivante

$$f_{n+3} = (n+2)\frac{(n+3)f_{n+2} + 24(n+2)f_{n+1} + 36(n+1)f_n}{(n+3)^2}$$

ce qui explique la friabilité des coefficients observée ci-dessus (la multiplication par $n+2$ nous fait « engranger » les facteurs premiers un à un, et la propriété conjecturée a en effet une grande probabilité d'être « invariante » sous l'action de cette récurrence, puisque seule la division par $n+3$ vient la rompre épisodiquement). Cette discussion est bien sûr motivée par le fait que de nombreux petits facteurs premiers sont classiquement un sérieux indice d'une formule binomiale, ce qui semble donc exclu ici.

$f_0 = 1,\quad f_1 = 0,\quad f_2 = 2\ 3,\quad f_3 = 2^2\ 3,\quad f_4 = 2\ 3^2\ 5,\quad f_5 = 2^3\ 3^2\ 5,\quad f_6 = 2^3\ 3\ 5\ 17,\quad f_7 = 2^5\ 3^2\ 5\ 7,$
$f_8 = 2\ 3^2\ 5\ 7\ 29,\quad f_9 = 2^4\ 3\ 5\ 7\ 173,\quad f_{10} = 2^2\ 3^3\ 7\ 11\ 191,\quad f_{11} = 2^3\ 3^2\ 5\ 7\ 11\ 313,\quad f_{12} = 2^4\ 3^2\ 7\ 11\ 4327,$
$f_{13} = 2^7\ 3^3\ 7^2\ 11^2\ 13,\quad f_{14} = 2^6\ 3^3\ 5^2\ 11\ 13\ 241,\quad f_{15} = 2^8\ 3^2\ 7\ 11\ 13\ 3623,\quad f_{16} = 2\ 3^3\ 5^2\ 11\ 13\ 17\ 31\ 463,$
$f_{17} = 2^5\ 3^6\ 11\ 13\ 17\ 37\ 127,\quad f_{18} = 2^2\ 3\ 11\ 13\ 17\ 37\ 1401371,$
$f_{19} = 2^3\ 3^3\ 5\ 11\ 13\ 17\ 19\ 101\ 1709,\quad f_{20} = 2^2\ 3^2\ 5\ 11\ 13\ 17\ 19\ 5911091,\quad f_{21} = 2^4\ 3^4\ 5\ 11\ 13\ 17\ 19\ 939391,$
$f_{22} = 2^4\ 3^5\ 5\ 7\ 13\ 17\ 19\ 23\ 122663,\quad f_{23} = 2^8\ 3^5\ 5\ 11\ 13\ 17\ 19\ 23\ 28027,\quad f_{24} = 2^4\ 3^4\ 5\ 13\ 17\ 19\ 23\ 20717\ 4111,$
$f_{25} = 2^7\ 3^5\ 5\ 13^2\ 17\ 19\ 23\ 1573643,\quad f_{26} = 2^5\ 3^6\ 5^5\ 17\ 19\ 23\ 127\ 25793,\quad f_{27} = 2^6\ 3\ 5\ 13\ 17\ 19\ 23\ 137\ 807550729,$
$f_{28} = 2^6\ 3^4\ 5\ 17\ 19\ 23\ 29\ 593\ 17933417,\quad f_{29} = 2^8\ 3^2\ 5^2\ 7\ 17\ 19\ 23\ 29\ 251\ 269\ 58693,$
$f_{30} = 2^{13}\ 3^2\ 5\ 17\ 19\ 23\ 29\ 25154125811,\quad f_{31} = 2^9\ 3^3\ 5^2\ 17\ 19^2\ 23\ 29\ 31\ 17029\ 15541,$
$f_{32} = 2\ 3^3\ 5\ 11\ 17\ 19\ 23\ 29\ 31\ 1373\ 2478285659,\quad f_{33} = 2^6\ 3^2\ 5\ 17\ 19\ 23\ 29\ 31\ 20425831145231,$
$f_{34} = 2^2\ 3^3\ 5^2\ 11\ 19\ 23\ 29\ 31\ 97\ 1187\ 1703816923,\quad f_{35} = 2^3\ 3^4\ 5\ 17\ 19\ 23^2\ 29\ 31\ 9709009\ 2762171,$
$f_{36} = 2^2\ 3^2\ 5^3\ 7\ 19\ 23\ 29\ 31\ 193\ 547\ 19604939\ 3041,\quad f_{37} = 2^4\ 3^4\ 5\ 19^2\ 23\ 29\ 31\ 37\ 641\ 396519432929,$
$f_{38} = 2^4\ 3^3\ 5\ 23\ 29\ 31^2\ 37\ 239\ 7109\ 758203\ 40283,\quad f_{39} = 2^6\ 3^3\ 5^2\ 19\ 23\ 29\ 31\ 37\ 24757635462124381,$
$f_{40} = 2^2\ 3^4\ 5\ 13\ 17\ 23\ 29\ 31\ 37\ 41\ 14124779\ 573547393,\quad f_{41} = 2^5\ 3^4\ 5^3\ 23\ 29\ 31\ 37\ 41\ 247987079\ 40361\ 5237,$
$f_{42} = 2^3\ 3^3\ 5\ 23\ 29\ 31\ 37\ 41\ 50840291\ 156884333\ 11551,\quad f_{43} = 2^4\ 3^4\ 5\ 7\ 11\ 23\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 79\ 367\ 9661\ 97058657,$
$f_{44} = 2^8\ 3^6\ 5^2\ 23\ 29\ 31\ 37\ 41^2\ 43\ 415916449330087,\quad f_{45} = 2^7\ 3^2\ 5\ 11\ 23\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 209451013\ 35180441719,$
$f_{46} = 2^7\ 3^4\ 5^2\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 5174937340641852689,$
$f_{47} = 2^8\ 3^3\ 5\ 23\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 67\ 10272663647683\ 14401,$
$f_{48} = 2^4\ 3^4\ 5\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 173\ 433\ 95377849516455053,$
$f_{49} = 2^8\ 3^5\ 5^3\ 7\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 89\ 161717752549\ 347411,$
$f_{50} = 2^5\ 3^5\ 7^2\ 17\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 311\ 794602919302856359,$
$f_{51} = 2^6\ 3^4\ 5^2\ 7\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 73\ 1422074652227625702 61,$
$f_{52} = 2^5\ 3^5\ 7\ 17\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 113023675633012950 8311,$
$f_{53} = 2^7\ 3^6\ 7\ 13^2\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 419\ 530389\ 14293\ 9883\ 1777,$
$f_{54} = 2^7\ 3\ 5\ 7\ 11\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 197\ 1245322017135461070077,$
$f_{55} = 2^{10}\ 3^4\ 5\ 7\ 29\ 31\ 37^2\ 41\ 43\ 47\ 53\ 311880445365896009\ 6379,$
$f_{56} = 2^6\ 3^2\ 5\ 7\ 11\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 6849680837\ 69493\ 55589\ 214639,$
$f_{57} = 2^9\ 3^2\ 5\ 7^2\ 17^3\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 1338749828935630500817,$
$f_{58} = 2^7\ 3^3\ 5\ 7\ 19\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 305606179\ 30646240048856357,$
$f_{59} = 2^8\ 3^3\ 5\ 7\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 1087\ 16650460650758223527951,$
$f_{60} = 2^8\ 3^2\ 7\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 333493\ 23109710398223\ 6028056917,$
$f_{61} = 2^{10}\ 3^3\ 5\ 7\ 31^2\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 243531624397670731\ 9924133,$
$f_{62} = 2^{13}\ 3^4\ 7\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 1911875465086073761 4167\ 149423,$
$f_{63} = 2^{11}\ 3^4\ 7\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 2176874909602512022449587953,$
$f_{64} = 2\ 3^6\ 5^2\ 7^2\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 613\ 140544337343\ 3008198953291349,$
$f_{65} = 2^7\ 3^5\ 7\ 11\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 274872462588301\ 1164907397\ 3566273,$
$f_{66} = 2^2\ 3^5\ 5^2\ 7\ 13\ 29\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 252040270962533492546367127169,$
$f_{67} = 2^3\ 3^6\ 7\ 11\ 17\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 89\ 36461093\ 11012376569134037\ 5227,$
$f_{68} = 2^2\ 3^6\ 7\ 23\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53^2\ 59\ 61\ 67\ 835624672769\ 405485006911899269,$
$f_{69} = 2^4\ 3^5\ 5\ 7\ 17\ 37\ 41\ 43\ 47^2\ 53\ 59\ 61\ 67\ 113\ 2364409\ 82827612899\ 20721228901,$
$f_{70} = 2^4\ 3^6\ 5\ 7\ 23^2\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 67\ 71\ 9535900899555698593\ 526199\ 3833,$
$f_{71} = 2^6\ 3^8\ 5\ 7^2\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 3929685750946819\ 5633799863\ 10789,$
$f_{72} = 2^2\ 3^4\ 5\ 7\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 331535097155084777\ 5084506699\ 7606499,$
$f_{73} = 2^5\ 3^6\ 5\ 7\ 37^2\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 4673764229327\ 15564432011\ 5364241,$
$f_{74} = 2^3\ 3^5\ 5\ 7\ 17\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 577\ 608170846912056981095400971\ 6361,$
$f_{75} = 2^4\ 3^6\ 7\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 1533341213\ 90629902859\ 11872155469\ 3067,$
$f_{76} = 2^5\ 3^7\ 5^2\ 7\ 11\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 67190605136607726975452558494332 1,$
$f_{77} = 2^9\ 3^7\ 7\ 19\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 1151\ 252555272377\ 12383608150897150099,$
$f_{78} = 2^7\ 3^6\ 7^2\ 11\ 31\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 8585424041\ 23723744862880756987 3339,$
$f_{79} = 2^{10}\ 3^7\ 5\ 7\ 13\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 353\ 158832998115855575001 89\ 41685437,$
$f_{80} = 2^2\ 3^8\ 5\ 7\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 2107223\ 72907825500497970722361 4271467,$
$f_{81} = 2^6\ 3\ 5\ 7\ 41\ 43\ 47\ 59\ 61^2\ 67\ 71\ 73\ 79\ 204020310582650013413682719575643655 43,$
$f_{82} = 2^3\ 3^5\ 5\ 7\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 491\ 1069\ 22056435422427465367505323 27\ 310867,$
$f_{83} = 2^4\ 3^2\ 5\ 7\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 93020941539003146163898966061\ 7551918677,$
$f_{84} = 2^3\ 3^2\ 5\ 7\ 17\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 181\ 412244489\ 1693211036084385481672 3\ 6353\ 2503,$
$f_{85} = 2^5\ 3^3\ 7^2\ 43^2\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 2803480207180196380408744067671524755191,$
$f_{86} = 2^5\ 3^3\ 5\ 7\ 17\ 29\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 1026990857\ 850061663986896420584811458874 01,$
$f_{87} = 2^{10}\ 3^2\ 7\ 11\ 43\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 283\ 5839\ 15310123083045404481613532347661 1167,$
$f_{88} = 2^7\ 3^3\ 7\ 29\ 47\ 53\ 59\ 61^2\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 89\ 6827\ 5807\ 211061\ 9446557809593\ 152113782374347,$
$f_{89} = 2^{11}\ 3^4\ 5^2\ 7\ 11\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 89\ 425939\ 12663027373\ 225598487\ 7856630539116803,$
$f_{90} = 2^8\ 3^2\ 7\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 89\ 2243\ 50074807521382319038339051144283141782 2413,$
$f_{91} = 2^9\ 3^4\ 5^2\ 7^2\ 17\ 23\ 37\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 89\ 937\ 15609854839779327281251246623845 2823,$
$f_{92} = 2^9\ 3^3\ 7^2\ 13\ 37\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 89\ 991\ 231079\ 8551253639032373082791113875247813,$
$f_{93} = 2^{11}\ 3^3\ 7^2\ 23\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 89\ 613\ 99138478551168446958184344685498560447959,$
$f_{94} = 2^{13}\ 3^4\ 5\ 7^3\ 31\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 89\ 3644743\ 4535878637\ 181184200980133551593406 0017,$
$f_{95} = 2^{12}\ 3^4\ 5\ 7^2\ 29\ 47\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 89\ 56626848489322967475809860295834761285216 89,$
$f_{96} = 2^4\ 3^3\ 5\ 7^2\ 19\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 89\ 408911\ 39704657\ 11409933092014027059952842783366 40687,$
$f_{97} = 2^9\ 3^4\ 5\ 7^2\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79^2\ 83\ 89\ 97\ 2841260079793574909898480530411801067299530573,$
$f_{98} = 2^5\ 3^7\ 5\ 11\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 89\ 97\ 1904080972346103211\ 18481281026881073223958675 28473,$
$f_{99} = 2^6\ 3^2\ 5\ 7^2\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 89\ 97\ 83761\ 756191\ 90008092753280289544734694530571965 04861,$
$f_{100} = 2^5\ 3^4\ 5\ 11\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 89\ 97\ 101\ 10455069767\ 3705275752741\ 856811662685436279847677013.$

On observe la grande friabilité du nombre d'excursions de longueur n sur le réseau hexagonal (non restreintes au quart de plan).

Pour finir, le terme de tête de l'équation différentielle s'annule en $\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$, les coefficients de $F_{\mathbb{Z}^2}(z,0,0)$ ont donc une asymptotique d'ordre 6^n. Par ailleurs, insérer un comportement en $(z-\frac{1}{6})^\alpha$ pour F dans l'équation différentielle aboutit à l'équation

$$(12\alpha^2)+(36+114\alpha+114\alpha^2)(z-1/6)+288(\alpha+1)^2(z-1/6)^2+216(\alpha+1)(\alpha+2)(z-1/6)^3 = 0$$

c'est-à-dire que le polynôme indiciel est $12\alpha^2$, donc l'exposant (racine double) $\alpha = 0$ donne lieu à une solution analytique et solution logarithmique. Cette dernière donne alors une asymptotique prouvée être en $\Theta(\frac{6^n}{n})$, et numériquement $f_n \sim 0,2756\,\frac{6^n}{n}$. ∎

Exemple 17. *Marches dans le quart de plan du réseau hexagonal*
Regardons maintenant la marche pour laquelle on peut aller sur n'importe quelle alvéole adjacente tout en restant dans le premier « quadrant », elle donne la récurrence :

$$f_{n+1}(u,v) := P(u,v)f_n(u,v) - \{u^{<0}v^{<0}\}P(u,v)f_n(u,v).$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} F(z,u,v) \quad = \quad & 1+(uv^2+u^2)z+(u^2v^4+u^2+2u^3+v^4+2+u^4+uv^2)z^2 \\ & +(2+6u^2+7uv^2+u^3v^6+3u^4v^4+2uv^6+3u^5v^2+3u^4+u^6+4u^2v^4+4u^3v^2+2v^4)z^3+O(z^4) \end{aligned}$$

La série génératrice des excursions (`EIS A057648*`) donne

$$F(z) = F(z,0,0) = 1+0z+2z^2+2z^3+13z^4+34z^5+158z^6+594z^7+2665z^8+11558z^9+O(z^{10})$$

et avec l'aide de Maple, on trouve que $F(z) = F(z,0,0)$ semble vérifier l'équation

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & 12(2z+1)(252z^3+52z^2+19z-4) \\ & -(6531840z^8-4074624z^7+660096z^6+677952z^5+33648z^4-2808z^2-25080z^3-132z+48)F \\ & -6z(2z+1)(2068416z^7+337824z^6-426528z^5-77568z^4+18692z^3+3442z^2-242z-37)\partial_z F \\ & -6z^2(6z-1)(2z+1)(244944z^6+90072z^5-45060z^4-20226z^3-336z^2+511z+31)\partial_z^2 F \\ & -z^3(2z+1)(51408z^5+29304z^4-6188z^3-6274z^2-1102z-45)(6z-1)^2\partial_z^3 F \\ & -z^4(18z+1)(2z-1)(3z+1)(14z+3)(6z-1)^2(2z+1)^2\partial_z^4 F \end{aligned}$$

ou, de manière équivalente, la récurrence

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & -217728(n+5)(n+3)(n+2)(n+1)f_n \\ & -1728(n+3)(n+2)(97n^2+899n+1981)f_{n+1} \\ & 288(n+3)(141n^3+1970n^2+9144n+13828)f_{n+2} \\ & +48(n+4)(1095n^3+18182n^2+99397n+178242)f_{n+3} \\ & +8(n+5)(571n^3+10786n^2+67341n+137538)f_{n+4} \\ & +(-6541560-3827556n-833632n^2-80016n^3-2852n^4)f_{n+5} \\ & +(-1213776-609804n-114112n^2-9426n^3-290n^4)f_{n+6} \\ & +(47n^2+840n+3544)(9+n)^2 f_{n+7} \\ & +3(n+12)(9+n)(n+10)^2 f_{n+8}. \end{aligned}$$

La série génératrice des marches (`EIS A057647*`) donne

$$F(z) = F(z,1,1) = 1+2z+9z^2+38z^3+185z^4+914z^5+4706z^6+24632z^7+131309z^8+708284z^9+O(z^{10})$$

et semble vérifier l'équation

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & -2304z^4+1008z^3+1224z^2+72z-24 \\ & +96z^2(25+238464z^7+171072z^6+5616z^5-1752z^4+4584z^3-800z^2-450z)F \\ & +12(2z+1)(3815424z^9+787968z^8-532224z^7+72960z^6+14016z^5-22168z^4+1028z^3+388z^2-32z+1)\partial_z F \\ & +12z(2z+1)(2861568z^9+559872z^8-579744z^7+9456z^6+24240z^5-18592z^4+650z^3+645z^2-69z+2)\partial_z^2 F \\ & +2z^2(6z-1)(2z+1)(635904z^8+223488z^7-137280z^6-30000z^5+5640z^4-3452z^3-554z^2+150z-5)\partial_z^3 F \\ & +z^3(2z-1)(3z+1)(1104z^4+192z^3-24z^2+28z-1)(6z-1)^2(2z+1)^2\partial_z^4 F \end{aligned}$$

ou, de manière équivalente, la récurrence

$$
\begin{aligned}
0 \quad = \quad & -953856(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)f_n \\
& -20736(n+4)(n+3)(n+2)(31n+163)f_{n+1} \\
& +6912(n+4)(n+3)(37n^2+217n+247)f_{n+2} \\
& +384(n+4)(499n^3+6897n^2+30821n+44301)f_{n+3} \\
& +(-18100224-11312448n-2795712n^2-333120n^3-16320n^4)f_{n+4} \\
& +(2859840-319872n-589056n^2-116352n^3-6720n^4)f_{n+5} \\
& +(15350304+7688432n+1443536n^2+120736n^3+3808n^4)f_{n+6} \\
& +(-2736096-1224088n-202744n^2-14696n^3-392n^4)f_{n+7} \\
& -2(n+8)(99n^3+2876n^2+27857n+89976)f_{n+8} \\
& +5(n+11)(n+10)(n+9)(7n+68)f_{n+9} \\
& -(n+12)(n+10)(n+11)^2 f_{n+10}.
\end{aligned}
$$

Les deux récurrences conjecturées coïncident bien avec les « véritables » 300 premiers termes. Là aussi, il ne semble pas y avoir de formule binomiale simple puisque je n'ai pas remarqué de propriété notable de factorisation.

Ainsi, la marche sur le « quart » de réseau hexagonal (*i.e.*, contrainte à évoluér dans le quart de plan $\mathbb{N}^2$) semble avoir une série génératrice holonome, conformément à notre conjecture sur la D-finitude des marches à sauts bornés. ∎

Conclusion.
Dans ce chapitre, nous avons eu un aperçu de la large classe d'équations fonctionnelles auxquelles on aboutit naturellement pour les séries génératrices de marches. Nous avons dégagé des classes d'équations pour lesquelles on peut « expliciter » (voir tableaux ci-dessous) la série génératrice, notamment via la méthode du noyau, que l'on va de nouveau exploiter dans le chapitre suivant, ciblé sur des marches qui ne seront plus homogènes en espace.

	finissant n'importe où	finissant en 0
sans contrainte de positivité	$\mathbb{Z}$-chemins : $F_{\mathbb{Z}}(z,1) = \frac{1}{1-zP(1)}$	$\mathbb{Z}$-excursions : $F_{\mathbb{Z}}(z,0) = z\sum_{i=1}^{c}\frac{u_i'(z)}{u_i(z)}$
avec contrainte de positivité	$\mathbb{N}$-chemins : $F_{\mathbb{N}}(z,1) = \frac{1}{1-zP(1)}\prod_{i=1}^{c}(1-u_i(z))$	$\mathbb{N}$-excursions : $F_{\mathbb{N}}(z,0) = \frac{(-1)^{c+1}}{p_{-c}}\prod_{i=1}^{c}u_i(z)$

Les séries génératrices des marches suivant les contraintes

	série bivariée
sans contrainte de positivité	$F(z,u) = \frac{1}{1-zP(u)}$
avec contrainte de positivité	$F(z,u) = \frac{\prod_{i=1}^{c} u-u_i(z)}{u^c-zu^cP(u)}$

Les séries génératrices *bivariées* des marches suivant les contraintes

CHAPITRE 2

Marches inhomogènes et arbres de génération

Résumé : Les principaux résultats de ce chapitre sont
- les théorèmes 1 et 2 (des pages 63 et 65) qui montre la rationalité de la série génératrice d'un arbre de génération associé à une règle d'étiquetage « linéaire » ;
- le théorème 3 (p. 70) qui explicite, via la méthode du noyau, l'algébricité de la série génératrice d'un arbre de génération associé à une règle d'étiquetage « factorielle » ;
- le théorème 4 (p. 75) qui prouve la transcendance des séries génératrices d'arbres de génération ayant des règles d'étiquetage d'un type donné ;
- les exemples 33, 34, 35 et 36 (p. 79) qui déterminent les séries génératrices transcendantes d'arbres de génération, via des techniques de fractions continuées ;
- certains résultats « surprenants » (qui valent leur pesant de chocolat) comme un arbre de génération ayant l'ensemble des nombres premiers comme étiquettes mais une série génératrice rationnelle (ex. 22, p. 63), et un arbre de génération avec une règle fort simple mais une série génératrice non holonome (ex. 37, p. 80).

Les arbres de génération sont un sujet initié par J. West [**124**] et par la suite étudié par les écoles florentine [**95, 11, 13, 97, 104**] et bordelaise [**49, 50**].

Ce chapitre correspond dans sa plus grande partie à l'article « Generating Functions for Generating Trees », à paraître dans la revue Discrete Mathematics. Cette article résulte d'un travail réalisé en collaboration avec Mireille Bousquet-Mélou, Alain Denise, Philippe Flajolet, Danièle Gardy et Dominique Gouyou-Beauchamps, dont des versions préliminaires ont fait l'objet d'un rapport INRIA et d'une présentation au colloque [**5**].

Ma contribution majeure se situe dans l'exploitation de la méthode du noyau pour montrer l'algébricité de tout une classe d'arbres de génération (ce qui résout la conjecture de R. Pinzani et E. Pergola), et également quelques apports à des cas rationnels ou encore holonomes/non-holonomes (lien avec les fractions continuées).

1. Préambule

Dès sa naissance, que l'on situe en général en 1654 (correspondance de Pascal à Fermat), la théorie des probabilités a intimement été reliée à des problèmes d'énumération, ce qui est naturel quand on songe à la définition élémentaire d'une probabilité : « nombres de cas favorables sur nombre de cas possibles ». Tout le problème consiste alors à dénombrer les cas en question !

Une idée naturelle est de dessiner l'arbre de toutes les possibilités et de voir combien celui-ci compte de branches. Par exemple, toutes les suites de quatre tirages à pile ou face consécutifs se retrouvent par simple parcours de l'arbre de la figure 1. La structure de cet arbre (il est binaire !) reflète pleinement le dénombrement en 2^n, qui ne surprendra personne. De même, l'ensemble des permutations de n lettres peut se « construire » en insérant une n-ième lettre à chaque place possible d'un représentant de l'ensemble des permutations de $n-1$ lettres (on part de la racine 1 et on insère les autres lettres récursivement, par exemple, le

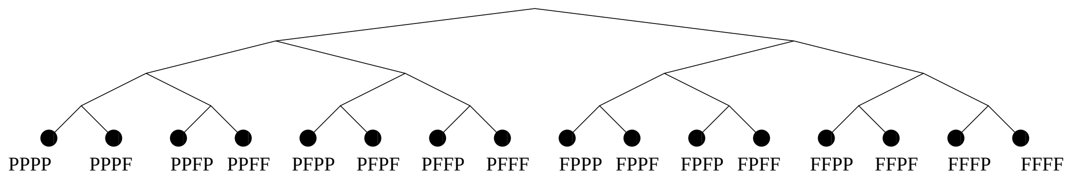


FIG. 1 – L'arbre des possibilités pour une suite de quatre tirages à pile ou face. Aussi simple qu'utile : il permet le dénombrement et la génération aléatoire, par simple parcours de branche.

nœud étiqueté 312 a 4 fils étiquetés 4312, 3412, 3142 3124). Le dénombrement en $n!$ s'ensuit. Il se trouve que de nombreuses autres structures combinatoires peuvent ainsi être énumérées en développant l'arbre des possibilités.

Ce chapitre est consacré à l'étude de tels *arbres des possibilités*, dont les noeuds sont étiquetés (en fonction d'une règle spécifique, reliée aux structures combinatoires que l'on veut dénombrer). Nous qualifierons d'ailleurs ces *arbres des possibilités* d'*arbres de génération* car ils présentent le grand intérêt de permettre de générer aléatoirement des objets discrets (en assurant une distribution de probabilités uniforme). Ils sont donc un outil à la fois naturel et puissant pour l'informatique, qui permet de générer des conjectures, d'effectuer des jeux de tests[1], des vérifications, sur tout un panel de structures générées aléatoirement.

2. Séries génératrices des arbres de génération

2.1. Introduction. Seules les structures combinatoires les plus simples comme les mots binaires, les permutations ou les involutions pures (*i.e.* les involutions sans point fixe) admettent une décomposition sous forme de produit. Dans un tel cas, l'ensemble Ω_n des objets de taille n est isomorphe à un produit d'ensembles : $\Omega_n \cong [1, e_1] \times [1, e_2] \times \cdots \times [1, e_n]$. Deux propriétés découlent de cette forte propriété de décomposabilité : (i) l'énumération est facile puisque la cardinalité d'Ω_n est $e_1 e_2 \cdots e_n$; (ii) la génération aléatoire est efficace puisque qu'elle est réduite à une suite de tirages aléatoires indépendants dans des intervalles. Un arbre infini, appelé un *arbre de génération uniforme* est déterminé par les e_i : la racine a comme degré e_1, chacun de ses e_1 fils a comme degré e_2, et ainsi de suite. Cet arbre décrit la séquence de tous les choix possibles et les objets de taille n sont alors naturellement en correspondance avec les branches de longueur n, ou, d'une façon équivalente, avec les nœuds de génération n dans l'arbre. L'arbre de génération est donc totalement déterminé par le degré de sa racine (e_1) et un ensemble de règles de récriture, ici de la forme suivante :

$$(e_i) \rightsquigarrow (e_{i+1})\ (e_{i+1})\ \cdots (e_{i+1}) \equiv (e_{i+1})^{e_i},$$

[1]Lors d'une rencontre doctorants-entreprises, j'ai récemment eu l'occasion de parler de mes recherches avec des employés d'une entreprise américaine de logiciels et solutions informatiques. Ces derniers m'ont dit qu'il leur était assez courant et utile d'avoir recours à de telles générations d'instances pour tester des programmes, cette méthode étant d'ailleurs dénommée « white box testing ».

où la notation puissance est utilisée pour marquer les répétitions. Par exemple, les mots binaires, les permutations et les involutions pures correspondent à

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{S} & : & [(2),\ (2) \rightsquigarrow (2)\ (2)] \\ \mathcal{P} & : & [(1),\ \{(k) \rightsquigarrow (k+1)^k\}_{k\geq 1}] \\ \mathcal{I} & : & [(1),\ \{(2k-1) \rightsquigarrow (2k+1)^{2k-1}\}_{k\geq 1}].\end{array}$$

Une généralisation puissante de cette idée consiste à considérer des arbres de génération non contraints où tout jeu de récriture

$$\Sigma = [(s_0),\ \{(k) \rightsquigarrow (e_{1,k})\ (e_{2,k})\ \cdots\ (e_{k,k})\}] \tag{9}$$

est permis. Ici l'*axiome* (s_0) spécifie le degré de la racine, tandis que les *productions* $e_{i,k}$ listent les degrés permis des k fils d'un nœud étiqueté par k. Dans la foulée de Barcucci, Del Lungo, Pergola et Pinzani, nous appelons Σ un *ECO-système* (ECO pour « Enumerating Combinatorial Objects »). Évidemment, il y a beaucoup de liberté d'action et il est envisageable de décrire bien plus de structures que celles qui correspondent à une forme produit ou à un arbre de génération uniforme. D'un autre côté, il n'est pas question d'énumérer *toutes* les sortes d'objets combinatoires avec règles du type (9). Nous verrons dans la sous-section sur les systèmes algébriques que notre méthode de résolution des équations fonctionnelles de séries génératrices de marches s'applique en fait sur une classe plus large de systèmes de récriture, permettant ainsi d'énumérer encore plus d'objets combinatoires (mais pas tous !).

Le concept d'arbre de génération apparaît dans différents articles : West les a introduit dans le contexte d'énumération de permutations à motifs exclus [**124, 125**] ; puis cette idée a été par la suite exploitée dans des problèmes voisins [**12, 14, 49, 50**]. Une contribution majeure dans le domaine est due à Barcucci, Del Lungo, Pergola, et Pinzani [**11, 13**] qui montrèrent que de nombreuses structures combinatoires classiques peuvent être énumérées par des arbres de génération. Pour un exemple récent, on peut trouver dans [**95**] une tentative de modélisation de l'occupation d'un réseau d'imprimantes par des arbres de génération.

Il existe une forme remarquable équivalente aux arbres de génération. Considérons les *marches* sur les entiers positifs commençant au point (s_0) et telles que les seules transitions possibles soient celles spécifiées par Σ (en cas de transitions avec multiplicité, on considérera que les sauts sont colorés). Ainsi, les marches de longueur n sont en bijection avec les nœuds de génération n dans l'arbre. Ces marches sont contraintes par les règles de cohérence des arbres, concrètement, il doit y avoir exactement k arêtes issues du point k (sur la droite des entiers positifs).

Exemple 18. *Permutations évitant le motif* 123

La méthode d' « expansion locale » (détaillée ci-après) fournit parfois de bons résultats pour l'énumération de permutations à motifs exclus. Il ne faudrait pas avoir trop rapidement de faux espoirs sur la conjecture de Stanley-Wilf [**3**] (borne en A^n), car certaines permutations à motifs exclus ne sont pas énumérables par ECO-système. L'exemple suivant montre un cas favorable. Considérons l'ensemble $\mathfrak{S}_n(123)$ des permutations de longueur n telles qu'elles *évitent le motif* 123 : il n'existe pas d'entiers $i < j < k$ tels que $\sigma(i) < \sigma(j) < \sigma(k)$. Par exemple, $\sigma = 4213$ appartient à $\mathfrak{S}_4(123)$ tandis que ce n'est pas le cas pour $\sigma = 1324$ car $\sigma(1) < \sigma(3) < \sigma(4)$.

Observons que si $\tau \in \mathfrak{S}_{n+1}(123)$, alors la permutation σ obtenue en retirant l'entrée $n+1$ de τ appartient to $\mathfrak{S}_n(123)$. Réciproquement, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n(123)$, on peut insérer la valeur $n+1$ à chaque endroit qui donne un élément de $\mathfrak{S}_{n+1}(123)$ (cette méthode est appelée expansion locale). Par exemple, la permutation $\sigma = 213$ donne 4213, 2413 et 2143 par insertion de 4 en première, seconde et troisième position respectivement. La permutation 2134, résultant de l'insertion de 4 en dernière position, n'appartient pas à $\mathfrak{S}_4(123)$. Ce procédé peut être décrit par un arbre dont les nœuds sont les permutations évitant 123 : la racine est 1 et les fils de chaque nœud σ sont les permutations obtenues par expansion locale. La figure 2(a) représente les quatre premiers niveaux de cet arbre. Étiquetons maintenant les nœuds par leur nombre de fils : nous obtenons l'arbre de la figure 2(b). Il est prouvé dans [**125**] que les k fils de chaque nœud étiqueté k sont étiquetés respectivement par $k+1, 2, 3, \ldots, k$. Ainsi, l'arbre que nous venons de construire est l'arbre de génération obtenu à partir des règles suivantes de récriture

$$[(2),\ \{(k) \rightsquigarrow (2)(3)\ldots(k-1)(k)(k+1)\}_{k\geq 2}]. \tag{10}$$

L'interprétation de (10) en terme de chemins implique que les permutations évitant le motif 123 sont en bijection avec les « marches avec retours » sur les entiers positifs, ces dernières étant par ailleurs isomorphes aux codes de Łukasiewicz des arbres planaires (voir, *e.g.*, [**116**, p. 31–35]). Nous retrouvons ainsi un résultat classique[**85**] : les permutations évitant le motif 123 sont comptées par les nombres de Catalan ; plus précisément, $|\mathfrak{S}_n(123)| = \binom{2n}{n}/(n+1)$. ∎

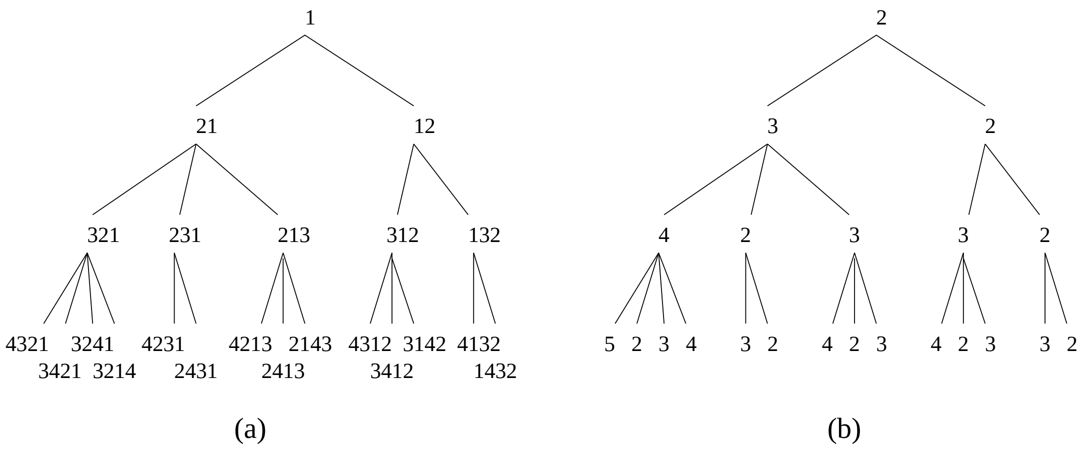


FIG. 2 – Arbre de génération des permutations évitant le motif 123

(a) nœuds étiquetés par les permutations.
(b) nœuds étiquetés par le nombre de fils.

Nous verrons ci-après que certains arbres de génération correspondent à des suites énumératrices de faible complexité calculatoire et fournissent des algorithmes rapides de génération aléatoire. Ainsi, il y a un intérêt immédiat à délimiter aussi précisément que possible les classes combinatoires qui admettent une spécification sous forme d'arbre de génération. Les séries génératrices condensent les informations structurelles en une simple entité analytique. Nous pouvons alors nous demander quels types de série génératrice peuvent être obtenus en lien avec un arbre de génération. Plus précisément, nous étudions ici les connexions entre les propriétés *structurelles* des règles de récriture et les propriétés *algébriques* des séries génératrices correspondantes.

Nous allons prouver plusieurs conjectures qui nous furent présentées par Renzo Pinzani et Elisa Pergola, notamment lors d'un exposé au Séminaire Algorithmes, à l'INRIA Rocquencourt en mars 1998. Nos principaux résultats peuvent être grosso modo résumés comme suit

— *Systèmes rationnels.* Les systèmes satisfaisant à de fortes conditions de régularité mènent à des séries génératrices rationnelles (Section 2.2). Cela couvre le cas des systèmes qui ont un nombre fini de degrés permis, comme les systèmes (2.a), (2.b), (2.c) et (2.d) ci-après où les étiquettes sont constantes sauf pour un nombre fixé d'étiquettes qui dépendent linéairement et uniformément de k.

— *Systèmes algébriques.* Les systèmes de forme *factorielle*, *i.e.* où une modification finie de l'ensemble $\{1,\dots,k\}$ est accessible à partir de k, mènent à des séries génératrices algébriques (Section 2.3). Ceci inclut en particulier les cas (2.f) et (2.g).

— *Systèmes transcendants.* Une raison qui peut faire qu'un système donne une série transcendante est que ses coefficients croissent trop vite, lui conférant ainsi un rayon de convergence nul. C'est le cas du système (2.h). Des séries génératrices transcendantes sont aussi associées aux systèmes trop « irréguliers ». Un exemple est le système (2.e). Nous discuterons aussi de l'holonomicité des systèmes transcendants (Section 2.4).

Exemple 19. *Un zoo de systèmes de récriture*

Voici une liste d'exemples revenant à travers ces pages.

$$[(3),\{(k)\rightsquigarrow(3)^{k-3}(k+1)(k+2)(k+9)\}] \tag{2.a}$$
$$[(3),\{(k)\rightsquigarrow(3)^{k-1}(3k+6)\}] \tag{2.b}$$
$$[(2),\{(k)\rightsquigarrow(2)^{k-2}(2+(k \bmod 2))(k+1)\}] \tag{2.c}$$
$$[(2),\{(k)\rightsquigarrow(2)^{k-2}(3-(k \bmod 2))(k+1)\}] \tag{2.d}$$
$$[(2),\{(k)\rightsquigarrow(2)^{k-2}(3-[\exists p\!:\!k=2^p])(k+1)\}] \tag{2.e}$$
$$[(2),\{(k)\rightsquigarrow(2)(3)\dots(k-1)(k)(k+1)\}] \tag{2.f}$$
$$[(1),\{(k)\rightsquigarrow(1)(2)\dots(k-1)(k+1)\}] \tag{2.g}$$
$$[(2),\{(k)\rightsquigarrow(2)(3)(k+2)^{k-2}\}] \tag{2.h}$$

(Dans (2.e), nous utilisons la notation crochet d'Iverson : $[P]$ égale 1 si P est vérifié, 0 sinon.)

■

2.1.1. *Notations.* à partir d'ici, nous adoptons les notations fonctionnelles pour les règles de récriture : les systèmes seront de la forme

$$[(s_0),\quad \{(k)\rightsquigarrow(e_1(k))\ (e_2(k))\dots(e_k(k))\}]$$

où s_0 est une constante et où chaque e_i est une fonction de k. De plus, nous supposons que toutes les valeurs apparaissant dans l'arbre de génération sont positives.

Dans l'arbre de génération, notons f_n le nombre de nœuds au niveau n et s_n la somme des étiquettes de ces nœuds. Par convention la racine a pour niveau 0, et donc $f_0=1$. En terme de marches, f_n est le nombre de marches de longueur n. La série génératrice associée au système est

$$F(z)=\sum_{n\geq 0} f_n z^n.$$

Remarquons que $s_n=f_{n+1}$, et que la suite $(f_n)_n$ est croissante.

Soit maintenant $f_{n,k}$ le nombre de nœuds au niveau n ayant pour étiquette k (ou le nombre de marche de longueur n finissant à la position k). Nous utiliserons aussi les séries génératrices suivantes :

$$F(z,u) = \sum_{n,k\geq 0} f_{n,k} z^n u^k \qquad \text{and} \quad F_k(z) = \sum_{n\geq 0} f_{n,k} z^n.$$

Nous avons $F(z) = F(z,1) = \sum_{k\geq 1} F_k(z)$. De plus, les F_k satisfont la relation

$$F_k(z) = [k = s_0] + z \sum_{j\geq 1} \pi_{j,k} F_j(z), \tag{11}$$

où $\pi_{j,k} = |\{i \leq j : e_i(j) = k\}|$ est le nombre de transitions en une seule étape de j vers k. C'est équivalent à la récurrence suivante pour les $f_{n,k}$,

$$f_{0,s_0} = 1, \qquad f_{0,k} = 0 \text{ si } k \neq s_0 \qquad \text{et} \quad f_{n+1,k} = \sum_{j\geq 1} \pi_{j,k} f_{n,j}, \tag{12}$$

qui résulte d'une lecture « à l'envers » des chemins qui mènent à k en $n+1$ étapes.

2.1.2. *Dénombrement et génération aléatoire.* La récurrence (12) donne lieu à un algorithme qui calcule les colonnes de la matrice $(f_{n,k})$ par « propagation vers l'avant » : afin de calculer la $(n+1)$-ième ligne, il faut propager la contribution $f_{n,j}$ à $f_{n+1,e_i(j)}$ pour tous les couples (i,j) tels que $i \leq j$. Supposons que le système soit *linéairement majoré* : ceci signifie ici que les étiquettes des nœuds qui peuvent être atteints en m étapes sont bornées par une fonction linéaire de m. (Tous les systèmes donnés à l'exemple 19, sauf (2.b), sont linéairement bornés ; plus généralement, les systèmes où les sauts vers l'arrière sont bornés par une constante sont linéairement bornés.) Clairement, l'algorithme de propagation vers l'avant fournit un algorithme de dénombrement de complexité arithmétique au plus cubique.

Pour un système linéairement borné, une génération aléatoire uniforme peut également être atteinte en temps polynomial, comme montré dans [**15**]. Nous présentons ici le principe général.

Soit $g_{n,k}$ le nombre de marches de longueur n qui commencent par une étiquette k. Ces nombres sont déterminés par la récurrence $g_{n,k} = \sum_i g_{n-1,e_i(k)}$, qui retrace toutes les continuations possibles d'un chemin étant donnés sa position initiale. Clairement, $f_n = g_{n,s_0}$, où s_0 est l'axiome du système. Comme ci-dessus, les $g_{k,n}$ peuvent être déterminés en temps $O(n^3)$ tout en nécessitant $O(n^2)$ places mémoire. La génération aléatoire est alors obtenue comme suit : afin de générer une marche de longueur n, commençant à l'état k, choisir une transition i avec probabilité $g_{n-1,e_i(k)}/g_{n,k}$, et générer récursivement une marche de longueur $n-1$ commençant à l'état $e_i(k)$. Le coût d'une simple génération aléatoire est alors $O(n^2)$ si une recherche séquentielle est utilisée parmi les $O(n)$ possibilités pour chacun des n tirages aléatoires ; cette complexité en temps descend à $O(n \log n)$ si une recherche dichotomique est utilisée mais au prix d'une augmentation de la complexité en mémoire (qui devient $O(n^3)$ à cause des $O(n^2)$ tableaux de taille $O(n)$ nécessaires à une recherche dichotomique).

2.2. Systèmes rationnels. Nous donnons dans cette section trois critères (et une variation de l'un des deux) qui permettent de déduire que la série génératrice d'un ECO-système sera rationnelle.

Notre premier critère, le plus simple, s'applique aux systèmes pour lesquels les fonctions e_i sont linéairement bornées (uniformément majorées)

Proposition 1. *Si l'arbre ne comporte qu'un nombre fini d'étiquettes, alors $F(z)$ est rationnelle.*

DÉMONSTRATION. Seul un nombre fini des F_k sont non nuls, et ils sont liés entre eux par la récurrence linéaire à coefficients constants (11) ci-dessus. □

Exemple 20. *Les nombres de Fibonacci*
Le système $[(1),\ \{(k) \rightsquigarrow (k)^{k-1}((k \bmod 2)+1)\}]$ peut aussi être écrit comme $[(1),\ \{(1) \rightsquigarrow (2),\ (2) \rightsquigarrow (1)(2)\}]$. Ainsi, les seules étiquettes qui apparaissent dans l'arbre sont 1 et 2. L'équation (11) donne $F_1(z) = 1 + zF_2(z)$ et $F_2(z) = z(F_1(z) + F_2(z))$. Finalement,

$$F(z) = \frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n\geq 0} f_n z^n = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + \cdots,$$

la célèbre série génératrice des nombres de Fibonacci. ■

Aucun des systèmes des exemples 19 ne satisfait les conditions de la proposition 1. Cependant le critère suivant peut être appliqué aux systèmes (2.a) et (2.b).

Théorème 1. *Soit $\sigma(k) = e_1(k) + e_2(k) + \cdots + e_k(k)$. Si σ est une fonction linéaire de k, disons $\sigma(k) = \alpha k + \beta$, alors la série $F(z)$ est rationnelle. Plus précisément :*

$$F(z) \;=\; \frac{1 + (s_0 - \alpha)z}{1 - \alpha z - \beta z^2}.$$

DÉMONSTRATION. Pour $n \geq 0$, $k_1, k_2, \ldots k_{f_n}$ sont les étiquettes des f_n nœuds du niveau n. Ainsi

$$\begin{aligned} f_{n+2} \;=\; s_{n+1} &\;=\; (\alpha k_1 + \beta) + (\alpha k_2 + \beta) + \cdots + (\alpha k_{f_n} + \beta) \\ &\;=\; \alpha s_n + \beta f_n \;=\; \alpha f_{n+1} + \beta f_n. \end{aligned}$$

Nous savons que $f_0 = 1$ et $f_1 = s_0$. Le résultat s'ensuit. □

Exemple 21. *Bissection de la suite de Fibonacci*
Le système $[(2),\ \{(k) \rightsquigarrow (2)^{k-1}(k+1)\}]$ donne $F(z) = \frac{1-z}{1-3z+z^2} = 1 + 2z + 5z^2 + \cdots$, la série génératrice des nombres de Fibonacci de rang pair. Changer l'axiome en (3) donne l'autre moitié de la suite de Fibonacci[2].

D'autres systèmes, comme

$$\begin{aligned} &[(2),\ \{(k) \rightsquigarrow (1)^{k-1}(2k)\}], \\ &[(2),\ \{(k) \rightsquigarrow (2)^{k-2}(3-(k \bmod 2))(k+(k \bmod 2))\}], \\ &[(2),\ \{(k) \rightsquigarrow (2)^{k-2}(3-[k \text{ is prime}])(k+[k \text{ is prime}])\}], \end{aligned}$$

mènent à la même fonction $F(z)$ puisque $\sigma(k) = 3k - 1$ et $s_0 = 2$. Cependant, les arbres de génération sont différents, comme le sont les séries génératrices bivariées $F(z, u)$. ■

Exemple 22. *Nombres premiers et série génératrice rationnelle*
La marche partant de (2)

$$\begin{cases} (k) \rightsquigarrow (k+1)(k)(k+3)(2)^{k-3} & \text{pour } k \text{ non premier} \\ (k) \rightsquigarrow (k+1)(k+1)(k+2)(2)^{k-3} & \text{pour } k \text{ premier} \end{cases}$$

[2]Notons que pour l'harmonie de nombreuse identités combinatoires, il est plus judicieux d'adopter la convention inverse, la série génératrice des Fibonacci de rang pair joue alors le rôle d'un cosinus et celle de rang impair d'un sinus, mais allez faire entendre raison à des coauteurs bornés !

parcourt trivialement l'ensemble des nombres entiers > 1 et a une règle légèrement modifiée pour les nombres premiers mais néanmoins, la série génératrice de cette marche est rationnelle et vaut $F(z,1) = \frac{1-3z}{1-5z+2z^2}$ (car le poids de cette marche est $\sigma(k) = 5k-2$).

Encore plus amusant : il est possible de construire un arbre de génération dont l'ensemble des étiquettes correspond exactement à l'ensemble des nombres premiers mais qui a une série génératrice rationnelle $F(z)$. C'est pour le moins inattendu, car les nombres premiers sont usuellement considérés comme « trop irréguliers » pour être associés à une série génératrice rationnelle. Pour $n \geq 1$, notons p_n le n-ième nombre premier ; ainsi $(p_1, p_2, \ldots) = (2, 3, 5, \ldots)$. Supposons pour un instant que la conjecture de Goldbach soit vérifiée (tout nombre pair plus grand que 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers). Rappelons que d'après le postulat de Bertrand, on a $p_{n+1} < 2p_n$ pour tout n (voir *e.g.*, [**109**, p.140]).

Pour $n \geq 1$, le nombre $2p_n - p_{n+1} + 3$ est un nombre pair plus grand que 3. Soit q_n et r_n deux nombres premiers tels que $2p_n - p_{n+1} + 3 = q_n + r_n$. En particulier, $q_1 = r_1 = 2$. Considérons maintenant le système

$$[(2), \{(p_n) \rightsquigarrow (p_{n+1})(q_n)(r_n)(2)^{p_n - 3}\}].$$

Il satisfait le critère du théorème 1, avec $\sigma(k) = 4k-3$. Par conséquent, la série génératrice de l'arbre de génération associé est

$$F(z) = \frac{1-2z}{1-4z+3z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-3z}\right).$$

Ainsi, le nombre de nœuds au niveau n est simplement $(1+3^n)/2$. Ceci peut être vérifié sur les premiers niveaux de l'arbre dessiné à la figure 3.

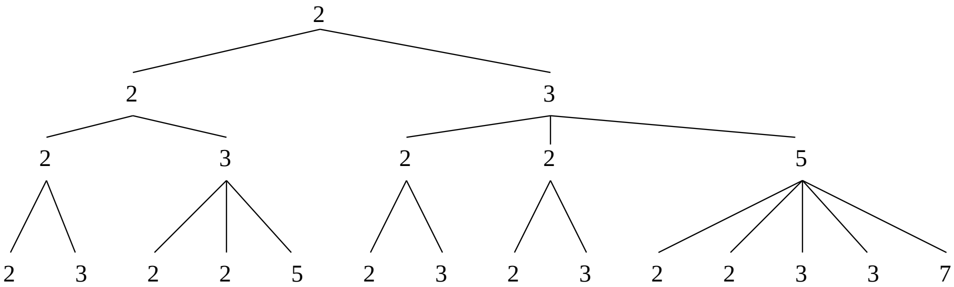


FIG. 3 – Arbre de génération avec nombres premiers comme étiquettes mais avec une série génératrice rationnelle.

Pour finir, on pourrait objecter que la conjecture de Goldbach n'est pas prouvée, toutefois elle est connu que tout nombre pair est la somme d'au plus 6 nombres premiers [**108**], et un exemple similaire peut alors être construit avec la même idée, à savoir

$$\begin{array}{rrl}
(2) \rightsquigarrow (3)(5) & (3) \rightsquigarrow (5)(5)(2) & (5) \rightsquigarrow (7)^2(2)^3 \\
(7) \rightsquigarrow (11)(7)(2)^4 & (11) \rightsquigarrow (13)^2(2)^9 & (13) \rightsquigarrow (17)(13)(2)^{11} \\
(17) \rightsquigarrow (19)^2(2)^{15} & (19) \rightsquigarrow (23)(19)(2)^{17} & (23) \rightsquigarrow (29)(19)(3)(3)(2)^{19} \\
(29) \rightsquigarrow (31)^2(2)^{27} & (31) \rightsquigarrow (37)(29)(2)^{29} & (37) \rightsquigarrow (41)(37)(2)^{35} \\
 & \text{et pour } n > 12 : & (p_n) \rightsquigarrow (p_{n+1}) \quad \alpha \quad (2)^{p_n - 39}(q_1)\ldots(q_m)
\end{array}$$

où α est le mot $(5)^{12}$ (éventuellement légèrement modifié comme expliqué ci-dessous) et où $\{q_1, \ldots, q_m\}$ est une partition en nombres premiers de $4p_n - p_{n+1} - 5.12 - 2(p_n - 39) = 2p_n - p_{n+1} + 18$ (c'est toujours un entier positif impair), le théorème de Vaughan permet alors d'affirmer que $m \leq 26$.

Ainsi la somme des membres droits vaut toujours $4p_n$ et quitte à changer quelques (5) en (3)(2) ou (5)(5) en $(2)^5$ quand la partition de Vaughan contient moins de 26 nombres, le nœud étiqueté p_n a bien $1 + 12 + p_n - 39 + 26 = p_n$ fils.

Finalement, cette marche parcourt exactement l'ensemble des nombres premiers (*i.e.* l'ensemble des nombres premiers est la composante connexe de cette marche) mais néanmoins, la série génératrice de cette marche est rationnelle et vaut $F(z, 1) = \frac{1-2z}{1-4z}$ (car le poids de cette marche est $\sigma(k) = 4k$). ■

Le théorème 1 peut être adaptée pour s'appliquer à des systèmes qui satisfont « presque » le critère du théorème 1, tel le système (2.c). Considérons un système de la forme

$$\begin{aligned} (s_0), \quad & k \rightsquigarrow e_1^{[0]}(k), \ldots, e_k^{[0]}(k) \quad \text{lorsque } k \text{ est pair,} \\ & k \rightsquigarrow e_1^{[1]}(k), \ldots, e_k^{[1]}(k) \quad \text{lorsque } k \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Supposons de plus que :

(i) les fonctions correspondantes σ_0 et σ_1 sont linéaires et ont le même coefficient de tête α, c'est-à-dire $\sigma_0(k) = \alpha k + \beta_0$ et $\sigma_1(k) = \alpha k + \beta_1$; (ii) il y a exactement m ($m \geq 0$) étiquettes impaires qui apparaissent dans le membre droit de chaque règle de récriture.

Théorème 2. *Si un système satisfait les propriétés* (i) *et* (ii) *ci-dessus, alors*

$$F(z) = \frac{1 + (s_0 - \alpha)z + (s_1 - \alpha s_0 - \beta_0)z^2}{1 - \alpha z - \beta_0 z^2 - m(\beta_1 - \beta_0)z^3}.$$

Bien sûr, si $\beta_0 = \beta_1$, nous retrouvons la série génératrice du théorème (1).

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 1. Le seul ingrédient nouveau est le fait que pour $n \geq 1$, le nombre de nœuds d'étiquette impaire au niveau n est mf_{n-1}. □

Le système (2.c) satisfait les propriétés (i) et (ii) ci-dessus avec $\alpha = 3$, $\beta_0 = -1$, $\beta_1 = 0$, $m = 1$, $s_0 = 2$ et $s_1 = 5$. Par conséquent, sa série génératrice est $F(z) = \frac{1-z}{1-3z+z^2-z^3}$. Le système (2.$d$), quoique très proche de (2.c), ne satisfait pas aux propriétés (ii) ci-dessus, et donc le théorème 2 ne s'applique pas. Cependant, une légère variation de l'argument du théorème 1, basée sur le fait que le nombre i_n d'étiquettes impaires au niveau n vérifie $i_n = 2(f_{n-1} - i_{n-1})$, prouve la rationalité de $F(z)$. On pourrait également utiliser le dernier critère de cette section, qui est d'une nature différente.

Nous considérons les systèmes $[(s_0), \ \{(k) \rightsquigarrow (e_1(k))(e_2(k)) \ldots (e_k(k))\}]$ qui peuvent être récrits comme

$$[(s_0), \ \{(k) \rightsquigarrow (c_1(k))(c_2(k)) \ldots (c_{k-m}(k))(k + a_1)^{\lambda_1}(k + a_2)^{\lambda_2} \ldots (k + a_m)^{\lambda_m}\}] \tag{13}$$

où $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m$ et où les fonctions c_i sont linéairement bornées. Posons $C = \max_{i,k}\{s_0, c_i(k)\}$.

Proposition 2. *Considérons le système* (13), *et posons* $\pi_{j,k} = |\{i \leq j : e_i(j) = k\}|$. *Si les séries*

$$\sum_{j \geq 1} \pi_{j,k} \ t^j$$

(pour $k \leq C$) sont rationnelles, alors la série $F(z)$ l'est aussi.

DÉMONSTRATION. On forme un système infini d'équations définissant les séries $F_k(z)$ en écrivant l'équation (11) pour tout $k \geq 1$. En particulier, pour $k > C$, on obtient

$$F_k(z) = z \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell F_{k-a_\ell}(z),$$

avec $F_j(z) = 0$ pour $j \leq 0$. Cette partie du système est aisée à exprimer en terme de $F_1, \ldots, F_C$. En effet, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$F_k(z) = \sum_{i=1}^{C} P_{i,k}(z) F_i(z) \tag{14}$$

où les $P_{i,k}$ sont des polynômes en z définis par la récurrence suivante : pour tout $i \leq C$,

$$P_{i,k}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq 0, \\ [k = i] & \text{si } 0 < k \leq C, \\ z \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell P_{i,k-a_\ell}(z) & \text{si } k > C. \end{cases} \tag{15}$$

En utilisant (14), on trouve

$$F(z) = \sum_{k \geq 1} F_k(z) = \sum_{i=1}^{C} \left[F_i(z) \sum_{k \geq 1} P_{i,k}(z) \right].$$

D'après (15), pour tout $i \leq C$, la série $\sum_{k \geq 1} P_{i,k}(z) t^k$ est une fonction rationnelle en z et t, de dénominateur $1 - z \sum_\ell \lambda_\ell t^{a_\ell}$. En $t = 1$, elle est rationnelle en z. Ainsi, pour prouver la rationalité de $F(z)$, il suffit de prouver La rationalité des $F_i(z)$, pour $i \leq C$.

En remontant aux C premières équations de notre système et en utilisant encore (15), on trouve, pour $k \leq C$:

$$F_k(z) = [k = s_0] + z \sum_{i=1}^{C} \left[F_i(z) \sum_{j \geq 1} P_{i,j}(z) \pi_{j,k} \right].$$

Cette fois aussi, $\sum_{j \geq 1} P_{i,j}(z) \pi_{j,k} t^j$ est une fonction rationnelle en z et t (le produit de Hadamard de deux séries rationnelles reste rationnel). Ainsi les fonctions $F_k(z)$, pour $k \leq C$, satisfont un système linéaire à coefficients rationnels : elles sont donc rationnelles elles-mêmes, tout comme $F(z)$. □

Les exemples (2.a), (2.c), (2.d) et (2.e) sont bien du type (13). La proposition ci-dessus implique, pour les trois premiers, qu'ils ont une série génératrice rationnelle. Le système (2.e) sera analysé dans la section 2.4, et on montrera qu'il a une série génératrice transcendante.

2.3. Marches factorielles et systèmes algébriques. Dans cette section, nous considérons des systèmes qui ont une *forme factorielle*. Par ceci, nous désignons d'une façon informelle les règles pour lesquelles l'ensemble des successeurs de (k) est une modification finie de l'intervalle (des entiers) $\{1, 2, \ldots, k\}$. Comme détaillé dans l'introduction, les ECO-systèmes peuvent être vus comme des marches sur la demi-droite des entiers positifs. Ainsi, nous considérons désormais le problème de l'énumération des marches sur les entiers positifs telles que les sauts permis à partir de k ne soient qu'une modification finie de l'intervalle entier $[0, k]$. Nous considérons principalement un nombre fini de modifications (suppressions/ajouts) autour du point k (mais nous donnerons aussi à la fin de cette section des exemples pour lesquels on fait quelques modifications autour de 0). Plus précisément, une *marche factorielle* est définie par un (multi)-ensemble de cardinalité finie $A \subset \mathbb{N}$ et un ensemble fini $B \subset \mathbb{N}^+$, où $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$, correspondant respectivement aux sauts permis vers l'avant (éventuellement colorés pour tenir compte des multiplicités) et aux sauts interdits vers l'arrière. En d'autres termes, les destinations possibles à partir de k sont données par la règle :

$$(k) \rightsquigarrow [0, k-1] \setminus (k - B) \ \cup \ (k + A). \tag{16}$$

Observons que ces types de marches ne sont pas nécessairement des ECO-systèmes, nous attaquons à un problème légèrement plus général, d'une part car certaines étiquettes peuvent être nulles (mais une simple translation pourrait nous donner une règle équivalente avec des étiquettes strictement positives) et d'autre part car nous ne requerrons pas que (k) ait exactement k successeurs.

Un ECO-système est dit factoriel s'il existe une translation des indices qui le transforme en une marche factorielle. Ainsi les règles d'un ECO-système factoriel sont de la forme

$$(k + r) \rightsquigarrow [r, k + r - 1] \setminus (k + r - B) \ \cup \ (k + r + A),$$

c'est-à-dire

$$(k) \rightsquigarrow [r, k - 1] \setminus (k - B) \ \cup \ (k + A) \qquad \text{pour } k \geq r \geq 1. \tag{17}$$

Pour un ECO-système (avec (s_0) pour axiome), la série génératrice $F(z)$ égale la série génératrice de la marche du type (16), avec $(s_0 - r)$ comme point de départ. Cependant, il faut se rappeler que les règles de récriture définissant un arbre de génération doivent satisfaire une condition supplémentaire : un nœud étiqueté k a exactement k fils. En prenant $k = r$ dans (17), ceci implique que $r = |A|$. En prenant $k > r + \max B$, ceci implique que $r + |B| = |A|$, et au final $B = \emptyset$. Ainsi, à strictement parler, les ECO-systèmes factoriels sont du type

$$(k) \rightsquigarrow [r, k - 1] \ \cup \ (k + A) \qquad \text{pour } k \geq r \geq 1,$$

où A est un multi-ensemble (d'entiers positifs) de cardinalité r. Par exemple, les systèmes $(2.f)$ et $(2.g)$ sont factoriels. Nous allons prouver que toutes les marches factorielles ont une série génératrice algébrique. Ce résultat s'applique naturellement aux ECO-systèmes.

Nous considérons encore la série génératrice $F(z, u) = \sum_{n,k \geq 0} f_{n,k} z^n u^k$, où $f_{n,k}$ est le nombre de marches de longueur n se terminant au point k. Nous notons en outre $F_k(z)$ le coefficient de u^k dans cette série, et $f_n(u)$ le coefficient de z^n. Le premier ingrédient de la preuve est un opérateur linéaire L, agissant sur une série formelle en u, qui code les déplacements possibles. Plus précisément, pour tout $n \geq 0$,

$$L(f_n(u)) = f_{n+1}(u).$$

L'opérateur L est construit pas à pas comme suit

— L'ensemble des déplacements de k vers toutes les positions $0, 1, \dots, k-1$ est décrit par l'opérateur M qui envoie u^k vers $u^0 + u^1 + \cdots + u^{k-1} = (1 - u^k)/(1 - u)$. Puisque M est une opérateur linéaire, nous avons pour toute série $g(u)$:

$$M[g](u) = \frac{g(1) - g(u)}{1 - u}.$$

— Le fait que les transitions proches de k soient modifiées, que celles du type $k+\alpha$ (avec $\alpha \in A$) soient autorisées et que celles du type $k-\beta$ (avec $\beta \in B$) soient interdites est codé par un polynôme de Laurent

$$P(u) = A(u) - B(u) \quad \text{with} \quad A(u) = \sum_{\alpha \in A} u^{\alpha} \quad \text{et} \quad B(u) = \sum_{\beta \in B} u^{-\beta}.$$

Le degré de P est $a := \max A$ (le plus grand pas en avant). Le plus petit degré apparaissant dans P est $-b = -\max B$, *i.e.* b est le plus grand pas possible vers l'arrière. L'opérateur

$$N(g(u)) := M(g(u)) + P(u)g(u)$$

décrit l'extension de la marche en une étape.

— Finalement, l'opérateur L est donné par

$$L[g](u) = N(g(u)) - \{u^{<0}\}N(g(u)),$$

où $\{u^{<0}\}h(u)$ est la somme de tous les monômes en $h(u)$ ayant un exposant négatif. Ainsi L n'est rien d'autre que N mais auquel on aurait retiré les monômes de degré négatif, ce qui correspond aux marches se terminant la droite des entiers négatifs. Pour toute série $g(u)$, la seule partie de $N(g(u))$ qui puisse contenir des monômes d'exposant négatif est $-B(u)g(u)$. Ainsi,

$$L[g](u) = N(g(u)) + \{u^{<0}\}[B(u)g(u)]$$

et si $g(u) = \sum_k g_k u^k$, alors

$$\begin{aligned} \{u^{<0}\}[B(u)g(u)] &= \sum_{\beta \in B} \sum_{k=0}^{\beta-1} g_k u^{k-\beta} \\ &= \sum_{k=0}^{b-1} g_k \sum_{\beta > k, \beta \in B} u^{k-\beta}. \end{aligned} \tag{18}$$

Nous supposons pour simplifier l'exposé que le point initial soit 0 ; les autres se traitent similairement. La relation linéaire $f_{n+1}(u) = L(f_n(u))$, avec $f_0(u) = 1$, donne

$$\begin{aligned} F(z,u) &= 1 + zL(F(z,u)) \\ &= 1 + z\left(\frac{F(z,1) - F(z,u)}{1-u} + P(u)F(z,u) + \{u^{<0}\}[B(u)F(z,u)]\right). \end{aligned}$$

Grâce à (18), on peut écrire

$$\{u^{<0}\}[B(u)F(z,u)] = \sum_{k=0}^{b-1} r_k(u)F_k(z),$$

où $r_k(u) = \sum_{\beta > k,\ \beta \in B} u^{k-\beta}$ est un polynôme de Laurent dont les exposants appartiennent à $[k-b, -1]$. Ainsi, $F(z,u)$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$F(z,u)\left(1 + \frac{z}{1-u} - zP(u)\right) = 1 + \frac{zF(z,1)}{1-u} + z\sum_{k=0}^{b-1} r_k(u)F_k(z). \tag{19}$$

Prenons un exemple. Les déplacements

$$(k) \rightsquigarrow (0)(1)\cdots(k-5)(k-3)(k-1)(k)(k+7)(k+9),$$

mènent à $A(u) = u^0 + u^7 + u^9$ et $B(u) = u^{-4} + u^{-2}$. De plus,

$$\{u^{<0}\}[B(u)F(z,u)] = (u^{-2} + u^{-4})F_0(z) + (u^{-1} + u^{-3})F_1(z) + u^{-2}F_2(z) + u^{-1}F_3(z),$$

ainsi l'équation fonctionnelle définissant $F(z,u)$ est

$$F(z,u)\left(1 + \frac{z}{1-u} - z(1 + u^7 + u^9 - u^{-4} - u^{-2})\right) =$$

$$1 + \frac{zF(z,1)}{1-u} + z(u^{-2} + u^{-4})F_0(z) + z(u^{-1} + u^{-3})F_1(z) + zu^{-2}F_2(z) + zu^{-1}F_3(z).$$

Le deuxième ingrédient de la preuve est une adaptation de la méthode du noyau (en anglais : *kernel method*) introduite au chapitre I. Rappelons qu'il semble appartenir au « folklore mathématique » depuis les années 1970. Il a été utilisé dans divers problèmes combinatoires [**37, 85**], voir aussi la section 15.4 de [**101**] et en probabilités [**53**]. On pourra consulter [**25, 28, 105**] pour des applications systématiques plus récentes. Cette méthode consiste à annuler le membre gauche de l'équation fonctionnelle fondamentale (19) en liant z et u, de telle façon que le coefficient de (l'inconnue) $F(z,u)$ devienne zéro. Cette contrainte définit u comme une des branches d'une équation algébrique en z. Chaque branche qui peut être substituée analytiquement dans l'équation fonctionnelle donne une relation linéaire entre la série inconnue $F(z,1)$ et les $F_k(z)$, $0 \leq k < b$. Si suffisamment de branches peuvent être substituées analytiquement, nous obtenons un système d'équations linéaires, dont la résolution implique que $F(z,1)$ et les $F_k(z)$ sont des fonctions algébriques. Dès lors, on obtient $F(z,u)$ comme une fonction algébrique bivariée.

En multipliant l'équation (19) par $u^b(1-u)$, on obtient une équation à coefficients polynomiaux. Cette nouvelle équation s'écrit $K(z,u)F(z,u) = R(z,u)$, où $K(z,u)$ est le *noyau* de l'équation :

$$\begin{aligned} K(z,u) &= u^b(1-u)\left(1 + \frac{z}{1-u} - zP(u)\right), \\ &= u^b(1-u) + zu^b - z(1-u)\sum_{\alpha\in A} u^{\alpha+b} + z(1-u)\sum_{\beta\in B} u^{b-\beta}. \end{aligned} \tag{20}$$

Ce polynôme a degré $a+b+1$ en u, et ainsi, il admet $a+b+1$ racines, qui sont des fonctions algébriques de z. La théorie classique des fonctions algébriques et la construction du polygone de Newton nous permet de développer, en n'importe quel point, ces racines en des séries de Puiseux (c'est-à-dire des séries qui contiennent des exposants fractionnaires). Les $a+b+1$ racines, développées autour de 0, peuvent être réparties comme suit :

— la branche « unité », noté u_0, tendant vers 1 quand $z \to 0$;
— b « petites » branches, notées $u_1, \ldots, u_b$, équivalentes à $\zeta z^{1/b}$ en $z = 0$ (avec $\zeta^b = 1$) ;
— a « grande » branches, notées $v_1, \ldots, v_a$, équivalentes à $\zeta z^{-1/a}$ en $z = 0$ (avec $\zeta^a = 1$).

Toutes les racines sont distinctes et il y a exactement $b+1$ branches finies : la branche unité u_0 et les b petites branches $u_1, \ldots, u_b$. Un argument élémentaire montre que $F(z,1)$ est une fonction analytique de z à l'origine, ainsi il y a au total $b+1$ branches substituables. Il s'avère que $b+1$ est aussi le nombre d'inconnues, $F(z,1)$ et $F_k(z)$, $0 \leq k < b$, qui apparaissent dans le membre droit de (19). En remplaçant u par $u_0, u_1, \ldots, u_b$ dans (19), on obtient un système de $b+1$ équations linéaires qui définit les $b+1$ séries inconnues. On pourrait résoudre le système, mais l'argument suivant est plus élégant.

Le membre droit de (19), multiplié par $u^b(1-u)$, est

$$R(z,u) = u^b(1-u)\left(1 + \frac{z}{1-u}F(z,1) + z\sum_{k=0}^{b-1} r_k(u)F_k(z)\right).$$

Par construction, c'est un *polynôme* en u de degré $b+1$ et de coefficient de tête -1. Remplacer u par $u_0, u_1, \dots, u_b$ dans l'équation (19) montre que ces séries sont exactement les $b+1$ racines de R, et donc

$$R(z,u) = -\prod_{i=0}^{b}(u-u_i).$$

Soit $p_a := [u^a]P(u)$ la multiplicité du plus grand saut en avant. Alors le coefficient de u^{a+b+1} dans $K(z,u)$ est $p_a z$, Et l'on peut écrire

$$K(z,u) = p_a z\prod_{i=0}^{b}(u-u_i)\prod_{i=1}^{a}(u-v_i).$$

Finalement, puisque $K(z,u)F(z,u) = R(z,u)$, on obtient

$$F(z,u) = \frac{-\prod_{i=0}^{b}(u-u_i)}{u^b(1-u) + zu^b - zu^b(1-u)P(u)} = -\frac{1}{p_a z\prod_{i=1}^{a}(u-v_i)}. \tag{21}$$

Nous avons prouvé le résultat suivant.

Théorème 3. *La série génératrice $F(z,u)$ des marches factorielles définies par* (16) *et commençant en* 0 *est algébrique ; elle est donnée par* (21), *où $u_0, \dots, u_b$ (resp. $v_1, \dots, v_a$) Sont les racines finies (resp. infinies) en $z = 0$ de l'équation $K(z,u) = 0$ et où le noyau K est défini par* (20). *En particulier, la série génératrice de toutes les marches, quelque soit leur position finale, est*

$$F(z,1) = -\frac{1}{z}\prod_{i=0}^{b}(1-u_i),$$

et la série génératrice des excursions, i.e., *des marches qui se terminent en* 0, *est, pour $b > 0$:*

$$F(z,0) = \frac{(-1)^b}{z}\prod_{i=0}^{b}u_i,$$

*et si $b = 0$ (*i.e. *la marche n'a pas de sauts vers l'arrière autres que ses sauts « factoriels »), la formule devient $F(z,0) = \frac{u_0(z)}{1+z-p_0 z}$.*

Ces résultats peuvent également être établis via un détour par les récurrences linéaires multivariées [**28, 105**] ; notre traitement y est intimement relié, mais a été obtenu de façon indépendante en mars 1998 [**4, 60**].

Le comportement asymptotique du nombre de marches de longueur n peut être établi via des méthodes d'analyse de singularités et de points cols. Les séries u_i ont « en général » une singularité en racine carrée, ce qui mène donc à un comportement du type $A\mu^n n^{-3/2}$. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 4.

Exemple 23. *Les nombres de Catalan*
C'est la marche factorielle la plus simple, $(k) \rightsquigarrow (0)(1)\dots(k)(k+1)$, ce qui correspond à l'ECO-système (2.f). L'opérateur L est donné par

$$L(f(u)) = \frac{f(1)-f(u)}{1-u} + (1+u)f(u).$$

Le noyau est $K(z,u) = 1-u+z-z(1-u)(1+u) = 1-u+zu^2$, donc $u_0(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$, et ainsi

$$F(z,1) = -\frac{1-u_0}{z} = \frac{1-2z-\sqrt{1-4z}}{2z^2} = \sum_{n\geq 1}\binom{2n}{n}\frac{z^{n-1}}{n+1},$$

la série génératrice des nombres de Catalan (suite[3] `EIS A000108`). Ce résultat est prévisible de par la relation triviale entre ces marches et les codes de Łukasiewicz. ∎

Exemple 24. *Les nombres de Motzkin*
Cette exemple, dû à Pinzani et à ses coauteurs, est dérivé de l'exemple précédent où on interdirait de faire un saut de longueur 0. La règle est donc

$$(k) \rightsquigarrow (0)\cdots(k-1)(k+1).$$

L'opérateur L est

$$L(f(u)) = \frac{f(1)-f(u)}{1-u} + uf(u).$$

Le noyau est $K(z,u) = 1-u+z-zu(1-u) = 1+z-u(1+z)+zu^2$, menant à

$$F(z,1) = \frac{1-z-\sqrt{1-2z-3z^2}}{2z^2} = 1+z+2z^2+4z^3+9z^4+21z^5+O(z^6),$$

la série génératrice des nombres de Motzkin (suite `EIS A001006`).

Notons que la série génératrice du nombre de feuilles étiquetées zéro à profondeur n (c'est-à-dire « les excursions » du point de vue marche) donne les nombres de Riordan : $[1,1,3,6,15,36,91,232,603,1585,4213,11298,\dots]$ (`EIS A005043`),

$$F(z,0) = \frac{u_0}{1+z} = \frac{1+z-\sqrt{1-2z-3z^2}}{2z(1+z)} = 1+z^2+z^3+3z^4+6z^5+O(z^6)\,.$$

Les deux suites ont une asymptotique en $\frac{3^n}{n^{3/2}}$. ∎

Exemple 25. *Nombres de Schröder*
Cet exemple est aussi dû à l'équipe florentine. La règle est $(k) \rightsquigarrow (0)\dots(k-1)(k)(k+1)^2$. D'après le théorème 3, nous avons

$$F(z,1) = \frac{1-3z-\sqrt{1-6z+z^2}}{4z^2} = 1+3z+11z^2+45z^3+197z^4+O(z^5).$$

Les coefficients sont les nombres de Schröder (`EIS A001003` : deuxième problème de Schröder). Nous donnons dans la Table 1 (page 81) une généralisation des nombres de Catalan et de Schröder, qui correspond à la règle $(k) \rightsquigarrow (0)\dots(k-1)(k)(k+1)^m$. D. Kremer a récemment montré [**88**] que cette règle décrit un ensemble de permutations évitant certains motifs. ∎

---

[3]Les nombres `EIS Axxxxxx` sont les identificateurs des suites dans *The Encyclopedia of Integer Sequences* [**113**].

Les exemples ci-dessus sont tous quadratiques. Cependant, il est clair que notre méthode permet d'obtenir des fonctions algébriques de degré quelconque : il suffit que l'ensemble des « exceptions » autour de k ait une étendue plus grande que 1. Donnons de suite une famille d'exemples pour lesquels on peut aller en avant en faisant un saut de taille > 1.

Exemple 26. *Arbres ternaires, dissection d'un polygone et arbres m-aires*
L'ECO-système avec l'axiome $(s_0) = (3)$ et la règle

$$(k) \rightsquigarrow (3)(4)\cdots(k)(k+1)(k+2)$$

est équivalent à la marche

$$(k) \rightsquigarrow (0)(1)\cdots(k)(k+1)(k+2).$$

Le noyau est $K(z,u) = 1 - u + zu^3$ et la série génératrice

$$F(z,1) = \sum_{n\geq 1} \binom{3n}{n} \frac{z^{n-1}}{2n+1}$$

compte les arbres ternaires `(EIS A001764)` .

Plus généralement, le système avec l'axiome (m) et la règle

$$(k) \rightsquigarrow (m)\cdots(k)(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)$$

donne les nombres de m-Catalan, $\binom{mn}{n}/((m-1)n+1)$, qui comptent le nombre d'arbres m-aires. Le noyau est $1-u+zu^m$ et la série génératrice $F(z,1)$ satisfait $F(z,1) = (1+zF(z,1))^m$. En particulier, les nombres de 4-Catalan $\binom{4n}{n}/(3n+1)$ apparaissent dans [**113**] `(EIS A002293)` et comptent des dissections de polygone. ∎

Dans les exemples ci-dessus, tous les sauts en arrière étaient permis. En d'autres termes, chacun de ces exemples correspond à un ECO-système. Donnons maintenant un exemple où les sauts en arrière de longueur 1 sont interdits.

Exemple 27. *Marche de Motzkin factorielle sans saut -1*
Considérons la modification suivante de la règle de Motzkin :

$$(k) \rightsquigarrow (0)\cdots(k-2)(k+1).$$

Le noyau est $K(z,u) = u(1-u)+zu-z(1-u)(u^2-1)$, et, d'après (21), la série $F(z) = F(z,1)$ est donnée par $F(z) = 1/[z(v_1-1)]$, où v_1 vérifie $K(z,v_1) = 0$ et est divergent en $z = 0$. Notons $G = zF(z)$, nous trouvons que l'équation algébrique définissant G est :

$$G = z\,\frac{1+2G+G^2+G^3}{1+G}.$$

∎

Jusqu'ici, nous avons seulement traité des cas de marches pour lesquelles l'ensemble des sauts autorisés était obtenu par une modification de l'intervalle $[0,k]$ autour de k. On peut aussi modifier cet intervalle autour de 0 : nous verrons (sur des exemples) que la série génératrice reste algébrique. Cependant, il est intéressant de noter que pour ces exemples, la méthode du noyau telle que décrite plus haut ne fournit pas assez d'équations entre les « fonctions inconnues » pour pouvoir résoudre l'équation fonctionnelle.

Commençons par expliquer comment nous modifions l'intervalle $[0,k]$ autour de 0. Les marches que nous souhaitons dénombrer sont toujours spécifiées comme un multi-ensemble A de sauts autorisés vers l'avant et d'un ensemble B de sauts interdits vers l'arrière. Mais, de plus, nous interdisons les sauts qui vont vers C, où C est un sous-ensemble fixé de $\mathbb{N}$. En d'autres mots, les déplacements possibles à partir de k sont donnés par la règle

$$(k) \rightsquigarrow [0, k-1] \setminus (C \cup (k - B)) \ \cup \ (k + A).$$

Cette fois encore, on peut écrire une équation fonctionnelle définissant $F(z,u)$:

$$F(z,u) = 1 + z\left(\frac{F(z,1) - F(z,u)}{1-u} + P(u)F(z,u) + \sum_{k=0}^{b-1} r_k(u)F_k(z) - \sum_{\gamma\in C} u^\gamma G_\gamma(z)\right), \tag{22}$$

où, comme plus haut,

$$P(u) = \sum_{\alpha\in A} u^\alpha - \sum_{\beta\in B} u^{-\beta} \quad \text{and} \quad r_k(u) = \sum_{\beta>k,\ \beta\in B} u^{k-\beta},$$

les nouveaux termes de l'équation sont

$$G_\gamma(z) = F(z,1) - \sum_{k=0}^{\gamma} F_k(z) + \sum_{\beta\in B} F_{\beta+\gamma}(z).$$

Observons que les trois premiers termes sont les mêmes que dans le cas $C = \emptyset$. L'équation, une fois multipliée par $u^b(1-u)$, devient $K(z,u)F(z,u) = R(z,u)$ où $K(z,u)$ est donné par (20) et

$$R(z,u) = u^b(1-u)\left(1 + \frac{zF(z,1)}{1-u} + z\sum_{k=0}^{b-1} r_k(u)F_k(z) - z\sum_{\gamma\in C} u^\gamma G_\gamma(z)\right).$$

Le noyau n'est pas modifié par l'introduction de C. Comme plus haut, il a degré $a+b+1$ en u et admet $b+1$ racines finies $u_0, \ldots, u_b$ en $z = 0$. Cependant, $R(z,u)$ contient maintenant $b+1+|C|$ fonctions inconnues : $F(z,1)$, les $F_k(z)$ (pour $0 \le k < b$) et les $G_\gamma(z)$ (pour $\gamma \in C$). Le degré de R en u n'est désormais plus $b+1$ mais $b+c+1$, où $c = \max C$. Les $b+1$ racines de K qui peuvent être substituées pour u dans l'équation fournissent $b+1$ équations linéaires entre les $b+|C|+1$ fonctions inconnues. Des équations supplémentaires sont obtenues en extrayant le coefficient de u^j dans l'équation (22), pour certaines valeurs de j. En général, on a :

$$F_j(z) = [j=0] + z\sum_{\alpha\in A} F_{j-\alpha}(z) + z[j \notin C]\left(F(z,1) - \sum_{k=0}^{j} F_k(z) - \sum_{\beta\in B} F_{j+\beta}(z)\right). \tag{23}$$

Il peut être prouvé qu'il existe un ensemble fini $S \subset \mathbb{N}$ tel que la combinaison des $b+1$ équations obtenues via la méthode du noyau et les équations (23) écrites pour $j \in S$ déterminent toutes les fonctions inconnues comme des fonctions algébriques en z (plus précisément, comme des fonctions rationnelles de z et des racines $u_0, \ldots, u_b$ du noyau). Ces classes jouent cependant un rôle marginal dans le contexte des ECO-systèmes. Pour ces raisons, nous ne donnons que quelques exemples. Les détails sur le procédé général de construction de l'ensemble S peuvent être trouvé dans [**26**].

Exemple 28. *Marche de Motzkin factorielle sans saut en 1*
Cet exemple est obtenu en modifiant les règles de Motzkin de l'exemple 24 autour de 0. Prenons $A = C = \{1\}$ et $B = \emptyset$. Les règles de récriture sont

$$(k) \rightsquigarrow (0)(2)(3)\cdots(k-1)(k+1).$$

L'équation fonctionnelle devient

$$(1-u+z-zu(1-u))F(z,u)=1-u+zF(z,1)-zu(1-u)G_1(z), \tag{24}$$

avec $G_1(z)=F(z,1)-F_0(z)-F_1(z)$. Le noyau a une unique racine finie en $z=0$:

$$u_0=\frac{1+z-\sqrt{1-2z-3z^2}}{2z},$$

tandis que le membre droit de l'équation (24) comporte *deux* fonctions inconnues. En écrivant (23) pour $j=0$ et $j=1$, on a

$$F_0(z)=1+z(F(z,1)-F_0(z)) \quad \text{and} \quad F_1(z)=zF_0(z).$$

Ces deux équations permettent d'exprimer F_0 et F_1, et donc G_1, en termes de $F(z,1)$:

$$G_1(z)=(1-z)F(z,1)-1.$$

Nous remplaçons $G_1(z)$ dans l'expression (24), afin d'isoler une seule fonction inconnue, $F(z,1)$. La méthode du noyau donne finalement

$$F(z,1)=\frac{3-3z^2-2z^3-(1+z)\sqrt{1-2z-3z^2}}{2(1-z-z^2+z^3+z^4)}=1+z+2z^2+3z^3+6z^4+12z^5+O(z^6).$$

■

Exemple 29. *Marche de Motzkin factorielle sans saut -2, ni en 1*
Choisissons $A=\{1\}$, $B=\{2\}$ et $C=\{2\}$. Les règles de récriture sont alors :

$$(k)\rightsquigarrow(0)(1)(3)(4)(5)\dots(k-3)(k-1)(k+1).$$

L'équation fonctionnelle est

$$\begin{aligned}&\left(u^2(1-u)+zu^2-zu^3(1-u)+z(1-u)\right)F(z,u)\\ &\qquad=u^2(1-u)+zu^2F(z,1)+z(1-u)\left(F_0(z)+uF_1(z)\right)-zu^4(1-u)G_2(z),\end{aligned} \tag{25}$$

avec $G_2(z)=F(z,1)-F_0(z)-F_1(z)-F_2(z)+F_4(z)$. Seules trois racines, u_0,u_1,u_2 peuvent être substituées pour u dans le noyau, tandis que le membre droit de l'équation contient quatre fonctions inconnues, $F(z,1),F_0(z),F_1(z)$ et $G_2(z)$. En écrivant (23) pour $j=0,1$ et 2, on obtient

$$\begin{aligned}F_0(z)&=1+z\left[F(z,1)-F_0(z)-F_2(z)\right],\\ F_1(z)&=zF_0(z)+z\left[F(z,1)-F_0(z)-F_1(z)-F_3(z)\right],\\ F_2(z)&=zF_1(z).\end{aligned}$$

La deuxième équation n'est pas d'une grande utilité mais, en combinant la première et la troisième, on trouve

$$F_0(z)=\frac{1+z\left(F(z,1)-zF_1(z)\right)}{1+z}.$$

En remplaçant $F_0(z)$ par cette expression dans (25), on a

$$\begin{aligned}&\left(u^2(1-u)+zu^2-zu^3(1-u)+z(1-u)\right)F(z,u)=u^2(1-u)+\frac{z(1-u)}{1+z}\\ &\qquad+zF(z,1)\left(u^2+\frac{z(1-u)}{1+z}\right)+z(1-u)F_1(z)\left(u-\frac{z^2}{1+z}\right)-zu^4(1-u)G_2(z).\end{aligned} \tag{26}$$

Il nous reste trois fonctions inconnues, reliées par trois équations linéaires obtenues en annulant le noyau. Résoudre ces équations donne $F(z,1)$ comme une énorme fonction rationnelle en z, u_0, u_1 et u_2, symétrique en les u_i. Ceci implique que $F(z,1)$ peut également être écrite comme une fonction rationnelle en z et $v \equiv v_1$, la racine restante. En particulier, $F(z,1)$ est algébrique de degré au plus 4.

Afin d'obtenir directement une expression de $F(z,1)$ en termes de z et v, nous pouvons procéder comme suit. Soit $R'(z,u)$ le membre droit de l'équation (26). Alors $R'(z,u)$ est un polynôme en u de degré 5, et les trois racines sont u_0, u_1, u_2. Par conséquent, en tant que polynôme en u, $K(z,u)$ divise $(u-v)R(z,u)$.

Évaluons $(u-v)R'(z,u)$ modulo $K(z,u)$: on obtient un polynôme de degré 3 en u, dont les coefficients dépendent de $z, v, F(z,1), F_1(z)$ et de $G_2(z)$. Ce polynôme doit être nul : cela donne un système de quatre équations (non indépendantes) reliant les trois fonctions inconnues $F(z,1), F_1(z)$ et $G_2(z)$. Résoudre les trois premières équations donne

$$\begin{aligned} F(z,1) &= \frac{1+z+z^2-(z+1)zv+(z+1)zv^2-z^2v^3}{1-z^2-z(1-z^2)v+z^3v^3} \\ &= 1+z+2z^2+3z^3+6z^4+11z^5+23z^6+47z^7+101x^8+O(z^9). \end{aligned}$$

En éliminant v entre cette expression et $K(z,v)=0$, on obtient une équation quartique satisfaite par $F(z,1)$. ■

2.4. Systèmes transcendants.

2.4.1. *Transcendance.* Le rayon de convergence d'une série algébrique est toujours positif. Ainsi, un système pourrait donner une série transcendante si ses coefficients croissaient trop vite, conférant un rayon de convergence nul à la série. C'est le cas pour le système (2.h), comme prouvé de par le théorème suivant.

Théorème 4. *Soit b un entier positif. Pour $k \geq 1$, posons $\mu(k) = |\{i : \ e_i(k) \geq k-b\}|$. Supposons que :*

1. *pour tout k, il existe un saut vers l'avant partant de k (*i.e., *$e_i(k) > k$ pour au moins un certain i),*
2. *la suite $(\mu(k))_k$ est croissante et tend vers l'infini.*

alors la série génératrice (ordinaire) du système a un rayon de convergence nul.

DÉMONSTRATION. Soit s_0 l'axiome du système. Notons $h_n = \mu(s_0+b)\mu(s_0+2b)\cdots\mu(s_0+nb)$. Prouvons que l'arbre de génération contient au moins h_n nœuds au niveau $n(b+1)$. Au niveau nb, considérons un nœud v étiqueté k, avec $k \geq s_0+nb$. Un tel nœud existe d'après la première condition. Par définition de $\mu(k)$, ce nœud a $\mu(k)$ fils dont l'étiquette est au moins $k-b$. Puisque m est croissante, v a au moins $\mu(s_0+nb)$ fils d'étiquette plus grande que $s_0+(n-1)b$. En itérant ce procédé, on voit qu'au niveau $nb+i$, au moins $\mu(s_0+(n-i+1)b)\cdots\mu(s_0+nb)$ des fils de v ont une étiquette plus grande (ou égale) à $s_0+(n-i)b$, pour $0 < i \leq n$. En particulier, pour $i=n$, on obtient qu'au niveau $n(b+1)$ au moins h_n fils de v dont l'étiquette est plus grande que s_0.

Ainsi $f_{n(b+1)} \geq h_n$ et puisque $h_n/h_{n-1} = \mu(s_0+nb)$ tend vers l'infini quand $n \to \infty$, la série $\sum_n h_n z^{n(b+1)}$ a un rayon de convergence nul et il en est de même pour $F(z) = \sum_n f_n z^n$. □

En particulier, ce théorème implique que *la série génératrice de tout ECO-système pour lequel la longueur des pas en arrière est bornée a un rayon de convergence nul.* De nombreux exemples de ce type sont donnés dans la prochaine section, dans laquelle nous étudions si la série génératrice correspondante est holonome ou pas. Nantel Bergeron a posé à FPSAC'99 la question de la nature de l'exemple suivant, pour lequel les sauts vers l'arrière ne sont pas bornés.

Exemple 30. *Une fausse marche factorielle*
Considérons le système avec axiome (1) et la règle de récriture $\{(k) \leadsto (2)(4)\cdots(2k)\}$. Le théorème 4 s'applique avec $b = 0$ et $\mu(k) = 1 + \lfloor k/2 \rfloor$. Notons que le rayon de convergence de $F(z)$ est nul même si toutes les fonctions e_i sont bornées, et même constante : $e_i(k) = 2i$ pour tout $k \geq i$. La série $F(z)$ est bien sûr transcendante. Notons, cependant, que $F(z,u)$ vérifie une équation fonctionnelle qui rappelle au premier abord les équations de la section 2.3 :

$$F(z,u) = u + zu^2\ \frac{F(z,1) - F(z,u^2)}{1-u^2}.$$

■

L'exemple suivant montre que le théorème 4 n'est pas loin d'être optimale : un ECO-système pour lequel toutes les fonctions e_i croissent linéairement peut avoir un rayon de convergence fini.

Exemple 31. *Marche transcendante de rayon de convergence* > 0
Le système avec axiome (1) et la règle $(k) \leadsto (\lceil k/2 \rceil)^{k-1}(k+1)$ mène à une série génératrice de rayon de convergence positif.
Commençons avec la récurrence définissant les $f_{n,k}$; nous avons $f_{0,1} = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$f_{n+1,k} = f_{n,k-1} + (2k-1)f_{n,2k} + (2k-2)f_{n,2k-1}.$$

Il est pratique d'introduire $g_{n,k} = f_{n,n-k+1}$. Nous récrivons alors la récurrence précédente comme

$$g_{n+1,k} = g_{n,k} + (2n-2k+3)g_{n,2k-n-3} + (2n-2k+2)g_{n,2k-n-2}. \tag{27}$$

Maintenant, la plus grande étiquette apparaissant au niveau n dans l'arbre est $n+1$. En d'autres termes, $g_{n,k} = 0$ pour $k < 0$. Ainsi l'équation (27) implique que pour $k \geq 0$, la suite $(g_{n,k})_n$ est croissante et atteint une valeur constante $g(k)$ dès que $n \geq 2k-1$.

En retournant au nombre f_n de nœuds au niveau n, nous avons

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} g_{n,k} \leq \sum_{k=0}^{n} g(k).$$

Mais

$$\sum_{n\geq 0} z^n \sum_{k=0}^{n} g(k) = \frac{1}{1-z}\sum_{k=0}^{n} g(k)z^k,$$

et il suffit donc de prouver que la série génératrice des $g(k)$ a un rayon de convergence fini, *i.e.*, que ces nombres croissent au plus exponentiellement.

En écrivant (27) pour $n+1 = 2k-i$, pour $1 \leq i \leq k$, on obtient :

$$g_{2k-i,k} = g_{2k-i-1,k} + (2k-2i+1)g_{2k-i-1,i-2} + (2k-2i)g_{2k-i-1,i-1}.$$

En itérant cette formule pour i entre 1 et k, on a

$$\begin{aligned}
g(k) &= g_{2k-1,k} = \sum_{i=1}^{k} ((2k-2i+1)g_{2k-i-1,i-2} + (2k-2i)g_{2k-i-1,i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} ((2k-2i+1)g(i-2) + (2k-2i)g(i-1)) = \sum_{i=0}^{k-2} (4k-4i-5)g(i).
\end{aligned}$$

Cette inégalité (avec le fait que $g(0) = 1$) implique que pour tout $k \geq 0$, on a $g(k) \leq \widetilde{g}(k)$, où la suite $\widetilde{g}(k)$ est définie par $\widetilde{g}(0) = 1$ et $\widetilde{g}(k) = \sum_{i=0}^{k-2}(4k-4i-5)\widetilde{g}(i)$ pour $k > 0$. Mais la série $\sum_k \widetilde{g}(k)z^k$ est rationnelle, égale à $(1-z)^2/(1-2z-2z^2-z^3)$, et a un rayon de convergence fini. Ainsi, les $\widetilde{g}(k)$ et les $g(k)$ croissent au plus exponentiellement. ■

Les séries génératrices algébriques sont hautement contraintes tout aussi bien dans leur structure algébrique (par une équation polynomiale) que dans leur structure analytique (en termes de singularités ou de comportement asymptotique). En particulier, elles ont un nombre fini de singularités et elles admettent un développement local qui ne fait intervenir que des exposants rationnels. *A contrario*, une série génératrice qui a un nombre infini de singularités (*e.g.* une frontière naturelle) ou qui fait intervenir un élément transcendant (*e.g.* un logarithme) dans un développement asymptotique local est nécessairement transcendante (voir [**58**] pour une discussion sur les critères de transcendance). Dans le cas des arbres de génération, cela signifie que la présence d'une condition reliée à un élément transcendant devrait logiquement donner une série génératrice transcendante.

Exemple 32. *Un système de Fredholm*
Un exemple de ce fait est le système (2.e), pour lequel les règles sont irrégulières aux puissances de 2 :

$$s_0 = (2), \qquad (k) \rightsquigarrow (2)^{k-2}(3 - [\exists p : k = 2^p])(k+1), \quad k \geq 2.$$

Cet exemple fait intervenir la série de Fredholm $h(z) := \sum_{p\geq 1} z^{2^p}$, dont il est bien connu qu'elle admet le cercle unité comme frontière naturelle. (Ceci peut être vu via l'équation fonctionnelle $h(z) = z^2 + h(z^2)$, à partir de laquelle on montre que $h(z)$ est infini à toutes les racines carrées itérées de l'unité.) D'après l'équation (11), on a, pour $k > 3$, $F_k(z) = zF_{k-1}(z)$, et ainsi

$$F_k(z) = z^{k-3}F_3(z) \quad \text{pour } k \geq 3.$$

Maintenant, en écrivant l'équation (11) pour $k = 2$, on a

$$\begin{aligned}
F_2(z) &= 1 + z\sum_{k\geq 3}(k-2)F_k(z) + z\sum_{p\geq 1} F_{2^p}(z) \\
&= 1 + \frac{z}{(1-z)^2}F_3(z) + zF_2(z) + F_3(z)\left(\frac{h(z)}{z^2} - 1\right) \\
&= 1 + zF_2(z) + F_3(z)\left(\frac{z}{(1-z)^2} + \frac{h(z)}{z^2} - 1\right).
\end{aligned}$$

Pour $k = 3$, on obtient :

$$\begin{aligned} F_3(z) &= zF_2(z) + z \sum_{k\geq 3,\ k\neq 2^p} F_k(z) \\ &= zF_2(z) + F_3(z)\left(\frac{1}{1-z} - \frac{h(z)}{z^2}\right). \end{aligned}$$

Résoudre pour $F_2(z)$ et $F_3(z)$, puis sommer $(F(z) = F_2(z) + F_3(z)/(1-z))$, donne

$$F(z) = \frac{(1-z)^2 h(z)}{(1-2z)(1-z)^2 h(z) - z^4} = 1 + 2z + 5z^2 + 14z^3 + 39z^4 + 108z^5 + O(x^6).$$

Dès lors, les fonctions $h(z)$ et $F(z)$ sont rationnellement liées et donc $F(z)$ est elle-même transcendante. La série h a rayon 1, mais le dénominateur de F s'annule avant que z n'atteigne 1 (et même avant qu'il n'atteigne 1/2). Le rayon de F est la plus petite racine du dénominateur. Sa valeur est facilement déterminée numériquement et on trouve environ 0.360102. De plus $F(z, 1)$ n'est pas algébrique car elle admet une infinité de singularité. ∎

2.4.2. *Holonomicité.* Dans le cas transcendant, on peut de plus discuter du caractère *holonome* de la série génératrice $F(z)$.

Une série est dite *holonome*, ou *D-finite* (différentiellement finie, [**115**]), si elle vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux en z. D'une manière équivalente, ses coefficients f_n vérifient une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux en n. Ceci implique, étant donné une suite f_n, que la série génératrice ordinaire $\sum_n f_n z^n$ est holonome si et seulement si la série génératrice exponentielle $\sum_n f_n z^n/n!$ est holonome. L'ensemble des séries holonomes a de jolies propriétés de clôture : la somme tout comme le produit de deux séries holonomes reste holonome, on aussi stabilité pour les substitutions par une série algébrique. Les séries holonomes incluent les séries algébriques et ont un nombre fini de singularités. Ceci implique que l'exemple 32, pour lequel $F(z)$ a une frontière naturelle, n'est pas holonome.

Nous étudions ci-dessous cinq ECO-systèmes qui, à première vue, ne semblent guère différents les uns des autres. En particulier, pour chacun d'entre eux, les sauts vers l'avant et vers l'arrière sont bornés. Par conséquent, le théorème 4 implique que leur série génératrice a un rayon de convergence nul. Cependant, nous verrons que les trois premiers d'entre eux ont une série génératrice holonome tandis que ce n'est pas le cas pour les deux derniers. Nous n'avons pas de critère général permettant de distinguer « à vue » un ECO-système « holonome » d'un ECO-système non holonome.

Parmi les systèmes à sauts bornés, ceux pour lesquels les $e_i(k) - k$ appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$ pour tout $i \leq k$ ont une jolie propriété : la série génératrice pour les *excursions* correspondantes (marches qui se termine et qui commence en 0) peut être écrite comme une fraction continuée [**57**] :

$$\cfrac{1}{1 - b_0 z - \cfrac{a_1 c_0 z^2}{1 - b_1 z - \cfrac{a_2 c_1 z^2}{1 - b_2 z - \cfrac{a_3 c_2 z^2}{\cdots}}}},$$

où les coefficients a_k, b_k et c_k sont les multiplicités apparaissant dans les règles

$$(k) \rightsquigarrow (k-1)^{a_k}(k)^{b_k}(k+1)^{c_k}.$$

Exemple 33. *Arrangements*
Le système $(k) \rightsquigarrow (k)(k+1)^{k-1}$ avec l'axiome $(s_0) = (2)$ donne une suite qui commence par $1, 2, 5, 16, 65, 326$ (EIS A000522). Il n'est pas difficile de voir que le tableau triangulaire $f_{n,k+2}$ est donné par la suite des arrangements $k!\binom{n}{k}$, ainsi la série génératrice *exponentielle* de cette suite est

$$\widetilde{F}(z,u) = \sum_{n\geq 0, k\geq 2} f_{n,k} u^k \frac{z^n}{n!} = \frac{u^2 e^z}{1-uz}.$$

Ce système vérifie les conditions du théorème 4 avec $b = 0$ et $\mu(k) = k$. Ainsi, on a $f_n \sim e\, n!$, et donc la série génératrice *ordinaire* $F(z)$ a un rayon de convergence nul et ne peut être algébrique. Toutefois, $\widetilde{F}(z,1) = e^z/(1-z)$ est holonome et il en est de même pour $F(z)$. ■

Exemple 34. *Involutions et polynômes d'Hermite*
Le système $(k) \rightsquigarrow (k-1)^{k-1}(k+1)$ avec l'axiome $(s_0) = (1)$ donne la suite qui commence par $1, 1, 2, 4, 10, 26, 76$ (EIS A000085). Ces nombres comptent les involutions : plus précisément, on trouve facilement via la récurrence satisfaite par les coefficients $f_{n,k}$ que $f_{n,k}$ est le nombre d'involutions sur n points, desquels $k-1$ sont fixes. Le théorème 4 s'applique avec $b = 1$ et $\mu(k) = k$.

La série génératrice exponentielle correspondante est

$$\widetilde{F}(z,u) = u \exp\left(zu + \frac{z^2}{2}\right), \tag{28}$$

Et sa valeur en $u = 1$ est holonome.

Les polynômes $f_n(u) = \sum_k f_{n,k} u^k$ qui comptent les involutions sur n points sont en fait reliés aux polynômes d'Hermite, définis par :

$$\sum_{n\geq 0} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(xt - \frac{t^2}{2}\right).$$

En effet, en comparant l'identité ci-dessus avec 28 on montre que $f_n(u) = u\, i^n H_n(-iu)$. ■

Exemple 35. *Permutations partielle et polynômes de Laguerre*
La règle de récriture $(k) \rightsquigarrow (k+1)^{k-1}(k+2)$, avec l'axiome (2), donne la suite qui commence par $1, 2, 7, 34, 209, ...$ (EIS A002720). D'après la récurrence satisfaite par les coefficients $f_{n,k}$, on déduit que $f_{n,n+k}$ est le nombre d'injections partielles de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans lui-même pour lesquelles $k-2$ points ne sont pas atteints. On a donc :

$$\widetilde{F}(z,u) = \frac{u^2}{1-uz} \exp\left(\frac{u^2 z}{1-uz}\right) = u^2 \sum_{n\geq 0} L_n(-u) \frac{(uz)^n}{n!},$$

où $L_n(u)$ est le n-ième polynôme de Laguerre. $\widetilde{F}(z,1)$ est donc holonome. ■
Les deux systèmes suivants, comme annoncé, mènent à des séries génératrices non holonomes.

Exemple 36. *Partitions et polynômes de Stirling*
Considérons le système $[(1), (k) \rightsquigarrow (k)^{k-1}(k+1)]$. On déduit de la récurrence vérifiée par les $f_{n,k}$ que $f_{n,k+1}$ est le nombre de Stirling du second genre $\left\{ n \atop k \right\}$, qui dénombre les partitions de n objets en k sous-ensembles non vides. La série génératrice exponentielle correspondante est

$$\widetilde{F}(z,u) = u \exp\left(u(\exp z - 1)\right).$$

En $u = 1$, cette série génératrice donne

$$\widetilde{F}(z,1) = \exp(\exp(z) - 1)) = 1 + z + 2\frac{z^2}{2!} + 5\frac{z^3}{3!} + 15\frac{z^4}{4!} + 52\frac{z^5}{5!} + 203\frac{z^6}{6!} + \dots$$

la série génératrice exponentielle des nombres de Bell (`EIS A000110`). Cette série entière n'est pas holonome car sa croissance (une tour de deux exponentielles) est trop importante pour être compatible avec la croissance attendue pour une série holonome.

Ainsi, $\widetilde{F}(z,1)$, tout comme $F(z,1)$, ne sont pas holonomes. ∎

Exemple 37. *Nombres de Bessel*
On étudie le système Σ_1 suivant, constitué de l'axiome (2) et de la règle de récriture

$$(2) \rightsquigarrow (2)(3), \quad (k) \rightsquigarrow (k-1)(k)^{k-2}(k+1), \quad k \geq 3. \tag{29}$$

Nous décalons les étiquettes de 2 afin d'obtenir une marche commençant en (0) avec pour règle

$$(0) \rightsquigarrow (0)(1), \quad (k) \rightsquigarrow (k-1)(k)^{k}(k+1), \quad k \geq 1.$$

La série génératrice bivariée correspondante $F(z,u)$ vérifie l'équation fonctionnelle différentielle

$$F(z,u)\left(1 - z(u + u^{-1})\right) = 1 + z(1 - u^{-1})F(z,0) + zu\frac{\partial F}{\partial u}(z,u),$$

dont la résolution n'a rien d'aisé. Cependant, comme observé dans [**57**], il est facile d'obtenir un développement en fraction continuée de la série génératrice des excursions :

$$F(z,0) = 1+z+2z^2+4z^3+9z^4+\cdots = \cfrac{1}{1 - z - \cfrac{z^2}{1 - z - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{1 - 3z - \ddots}}}} = \frac{1}{1 - z - z^2 B(z)},$$

où $B(z) = \sum_n B_n^* z^n = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + 14z^4 + 43z^5 + 143z^6 + \cdots$ est la série génératrice des nombres de Bessel (`EIS A006789`) et compte les partitions sans croisements [**69**]. Comme $F(z,0)$, la série $B(z)$ a un rayon de convergence nul. La croissance rapide de B_n^* entraîne

$$[z^n]F(z,0) \sim B_{n-2}^*.$$

De [**69**], on sait que $\log B_n^* \sim n \log n - n \log\log n + O(n)$, or cela ne peut être un comportement asymptotique de coefficients d'une série holonome (voir [**127**] pour les types admissibles). Par conséquent, $F(z,0)$ n'est pas holonome.

Afin de prouver maintenant que $F(z,1)$, elle aussi, n'est pas holonome, nous allons prouver que ses coefficients f_n ont le même comportement asymptotique que ceux de $F(z,0)$. Clairement,

$$[z^n]F(z,0) = f_{n,0} \leq \sum_k f_{n,k} = f_n\,.$$

Pour trouver une borne supérieure aux f_n, nous comparons le système Σ_1 (règle (29) ci-dessus) au système Σ_2 avec (2) pour axiome et $(k) \rightsquigarrow (k)^{k-1}(k+1)$ comme règle. Ce système génère un arbre dont nous notons g_n le nombre de nœuds à hauteur n. La forme des règles implique que l'arbre (non-étiqueté) associé à Σ_1 est un sous-arbre de l'arbre associé à Σ_2. Ainsi $f_n \leq g_n$. En comparant Σ_2 et le système étudié dans l'exemple précédent, on voit que g_n est le nombre de Bell B_{n+1}, dont le logarithme vérifie classiquement $\ln B_{n+1} = n \ln n - n \ln\ln n + O(n)$ (voir [**101**]). Ainsi, $\ln f_n = n \ln n - n \ln\ln n + O(n)$ et $F(z,1)$ n'est donc pas holonome. ∎

Un petit catalogue d'ECO-systèmes

Pour conclure, nous présentons dans la Table 1 un petit catalogue d'ECO-systèmes qui mènent à des suites combinatoirement intéressantes. Plusieurs exemples sont détaillés dans le papier ; D'autres sont dûs à West [**124, 125**] ou bien Barcucci, Del Lungo, Pergola, Pinzani [**11, 12, 14, 13**], ou encore du folklore. Chacun d'entre eux est l'illustration d'un de nos critères.

Axiome, système	Nom	EIS	série génératrice
SGO rationnelle			**SGO**
$(1), (k) \leadsto (k)^{k-1}((k \bmod 2)+1)$	Ex. 20 : Fibonacci	A000045	$\frac{1}{1-z-z^2}$
$(2), (k) \leadsto (2)^{k-1}(k+1)$	Ex. 21 : Fibonacci de rang pair	A001519	$\frac{1-z}{1-3z+z^2}$
$(3), (k) \leadsto (2)^{k-1}(k+1)$	Ex. 21 : Fibonacci de rang impair	A001906	$\frac{1}{1-3z+z^2}$
SGO algébrique			**SGO**
$(1), (k) \leadsto (1)\cdots(k-1)(k+1)$	Ex. 24 : nombres de Motzkin	A001006	$\frac{1-z-\sqrt{1-2z-3z^2}}{2z^2}$
$(2), (k) \leadsto (2)\cdots(k)(k+1)$	Ex. 23 : nombres de Catalan	A000108	$\frac{1-2z-\sqrt{1-4z}}{2z^2}$
$(3), (k) \leadsto (3)\cdots(k)(k+1)^2$	Ex. 25 : nombres de Schröder	A001003	$\frac{1-3z-\sqrt{1-6z+z^2}}{4z^2}$
$(4), (k) \leadsto (4)\cdots(k)(k+1)^3$	—	A007564	$\frac{1-4z-\sqrt{1-8z+4z^2}}{6z^2}$
$(m), (k) \leadsto (m)\cdots(k)(k+1)^{m-1}$	—	—	$\frac{1-mz-\sqrt{1-2mz+(m-2)^2z^2}}{2(m-1)z^2}$
$(3), (k) \leadsto (3)\cdots(k+2)$	Ex. 26 : arbres ternaires	A001764	$F=(1+zF)^3$
$(4), (k) \leadsto (4)\cdots(k+3)$	Ex. 26 : Dissections d'un polygone	A002293	$F=(1+zF)^4$
$(m), (k) \leadsto (m)\cdots(k+m-1)$	Ex. 26 : arbres m-aires		$F=(1+zF)^m$
Holonome			**SGE**
SGO transcendante			
$(1), (k) \leadsto (k+1)^k$	Permutations	A000142	$1/(1-z)$
$(2), (k) \leadsto (k)(k+1)^{k-1}$	Ex. 33 : Arrangements	A000522	$e^z/(1-z)$
$(1), (k) \leadsto (k-1)^{k-1}(k+1)$	Ex. 34 : Involutions	A000085	$e^{z+\frac{1}{2}z^2}$
$(2), (k) \leadsto (k+1)^{k-1}(k+2)$	Ex. 35 : permutations partielles	A002720	$e^{z/(1-z)}/(1-z)$
$(2), (k) \leadsto (k-1)^{k-2}(k)(k+1)$	Switchboard problem	A005425	$e^{2z+\frac{1}{2}z^2}$
$(2), (k) \leadsto (k-1)^{k-2}(k+1)^2$	involutions bicolorées	A000898	e^{2z+z^2}
SGO non holonome			**SGE**
$(1), (k) \leadsto (k)^{k-1}(k+1)$	Ex. 36 : nombres de Bell	A000110	e^{e^z-1}
$(2), (k) \leadsto (k)^{k-2}(k+1)^2$	Partitions bicolores	A001861	$e^{2(e^z-1)}$
$(2), (k) \leadsto (k-1)(k)^{k-2}(k+1)$	Ex. 37 : nombres de Bessel	A006789	—

Table 1 : Quelques ECO-systèmes ayant un intérêt combinatoire. Pour toutes les séries génératrices données ci-dessus, on a également une forme close pour la série génératrice bivariée $F(z,u)$.

2.5. Séries génératrices exponentielles d'ECO-systèmes transcendants.

Exemple 38. *Nombres sécants et tangents, nombres de Springer...*
Sylvie Corteel m'avait demandé si, avec les techniques de [**4**] ou [**6**], on pouvait trouver la série génératrice du système $[(1),(k) \rightsquigarrow (k-1)^k(k+1)^{k+1}]$. En codant la récurrence pour la série génératrice exponentielle et en la résolvant par une méthode de la variation de la constante, je me suis aperçu qu'il y avait dans ce cas un certain miracle, puisque l'intégration nous donne ici une forme close ! On obtient en effet $F(z,u) = \frac{1}{\cos(z)-u\sin(z)}$, en particulier les excursions sont dénombrées par $F(z,0) = \tan(z)$ est bien sûr reliée à une fraction continuée et génère la suite bien connue des nombres tangents (`EIS A000182`) : (1,2,16,272,7936,...). $F(z,1) = \frac{1+\tan(z)}{1-\tan(z)}$ génère quant à elle la « suite de Dumont » `EIS A000831` : (1,2,4,16,80,512,3904,...).

Comme observé par Sylvie, une légère variation, à savoir $[(0),(k) \rightsquigarrow (k-1)^k(k+1)^{k+1}]$ aboutit à $F(z,u) = \frac{1}{\sin(z)-u\cos(z)}$, ce qui donne les séries génératrices :
$F(z,1) = \frac{1}{\cos(z)-\sin(z)}$ des nombres de Springer (`EIS A001586`) : $(1,1,3,11,57,361,2763,\dots)$,
$F(z,0) = \frac{1}{\cos(z)}$ des nombres sécants d'Euler (`EIS A000364`) : $(1,1,5,61,1385,50521,\dots)$. ∎

Plus généralement, on peut essayer de résoudre les équations différentielles vérifiées par les séries génératrices (exponentielles) de divers ECO-systèmes transcendants, et, dans un certain nombre de cas, on obtient une forme close simple. Ceci suggérait qu'il existe une structure combinatoire reliant toutes ces formes closes et, en effet, S. Corteel a montré que la série génératrice d'un « produit » de règles de récriture s'exprime comme un produit de séries génératrices exponentielles des (modifications des) règles en question :

Théorème 5 (SGE des ECO-systèmes). *La série génératrice de la règle*

$$(l),(k) \rightsquigarrow (k-1)^{a_{-1}k}(k)^{a_0k+b_0}(k+1)^{a_1k+b_1}\dots(k+m)^{a_mk+b_m}$$

s'exprime comme le produit

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\exp\int_0^z F_i(x,u)^i dx\right)^{b_i}$$

où F_i est la série génératrice de la règle

$$(1),(k) \rightsquigarrow (k-1)^{a_{-1}k}\dots(k+m)^{a_mk}.$$

Démonstration. Voir l'article de S. Corteel [**38**] pour une jolie preuve bijective (qui utilise la théorie des préfabs), une autre approche étant comme dans l'exemple ci-dessus de résoudre « en aveugle » les équations différentielles auxquelles on aboutit via les récurrences sur les $f_n(u)$. □

Il apparaît ainsi que la combinatoire peut s'avérer utile pour ramener des équations différentielles assez lourdes à des équations différentielles plus simples.

2.6. Méthode du noyau et cas sous-déterminés. Si l'on dispose d'insuffisamment d'équations pour déterminer les inconnues (et aussi quand u n'apparaît pas dans le membre droit), on peut alors combler ce manque en dérivant l'équation fonctionnelle et en la regardant en $u = 1$ pour trouver de nouvelles relations.

Théorème 6. *Soit $a_1,\dots a_r$ et $e_1,\dots,e_m$ des entiers positifs. Considérons r polynômes (de $\mathbb{Z}[k]$) $p_1,\dots,p_r$. Une marche du type $(k) \rightsquigarrow (a_1)^{p_1(k)}\dots(a_r)^{p_r(k)}(k)_0^e\dots(k+m)^{e_m}$ a une série génératrice $F(z,u)$ rationnelle.*

DÉMONSTRATION. Cette règle donne la récurrence

$$f_{n+1}(u) = A(u)f_n(u) + \sum_{j=0}^{d} r_j(u)\partial_u^j f_n(1)$$

où d est le degré maximum des polynômes p_i, où $A(u) = \sum_{i=0}^{r} e_i u^i$ et où les r_j sont des polynômes de Laurent. Ceci donne directement l 'équation fonctionnelle

$$(1 - zA(u))\,F(z,u) = f_0(u) + z\sum_{j=0}^{d} \partial_u^j F(z,1) \tag{30}$$

En considérant les d dérivées successives par rapport à u, et en évaluant en $u = 1$, on obtient alors un système linéaire dont la résolution montre la rationalité de $F(z,1), \partial_u F(z,1), \ldots, \partial_u^j F(z,1)$ et donc de $F(z,u)$, à cause de la relation (30). □

Exemple 39. *La marche* $(k) \rightsquigarrow (0)^k(k+1)(k+2)(k+9)$
La série $F(z,1)$ (qui dénombre les nœuds de hauteur n dans l'arbre de génération associé à cette règle) est déjà connue [**44**], où elle est donnée par la même approche que dans notre théorème (1, p. 63).

Avec l'approche du théorème ci-dessus, on aboutit à l'équation fonctionnelle

$$F(z,u)(1 - z(u + u^2 + u^9)) = 1 + z\partial_u F(z,1).$$

Avec $u = 1$, on a la relation

$$F(z,1) = \frac{1 + z\partial_u F(z,1)}{1 - 3z}.$$

Maintenant en dérivant l'équation fonctionnelle par rapport à u, on a

$$\partial_u F(z,u)(1 - z(u + u^2 + u^9)) - F(z,u)z(1 + 2u + 9u^8)) = 0.$$

Avec $u = 1$ on obtient cette fois

$$\partial_u F(z,1) = \frac{12zF(z,1)}{1 - 3z}.$$

Finalement on a

$$F(z,1) = \frac{3z - 1}{3z^2 + 6z - 1}$$

et on a du même coup une forme close rationnelle pour F, à savoir

$$F(z,u) = \frac{1 - \frac{12z^2}{3z^2+6z-1}}{1 - z(u + u^2 + u^9)}.$$

■

2.7. Exemple de non homogénéité en temps : la partie de bonneteau progressive. Nous allons donner un exemple de marche non homogène en espace. Prenons par exemple la marche unidimensionnelle qui, lorsque l'on est en k, va en $k+1$ avec la probabilité $\frac{1}{k+1}$ et en 0 avec la probabilité $\frac{k}{k+1}$.

Ce schéma correspond à une « partie de bonneteau » : un magicien introduit sous vos yeux une pièce dans un des k gobelets opaques qu'il va manipuler. Il fait passer la pièce très rapidement d'un gobelet à l'autre. Il vous demande à la fin où se trouve la pièce. Il est pervers et il a très bien pu ne pas conserver la pièce dans l'un des gobelets. En général, le manipulateur est si habile, que vous n'avez pas de meilleure stratégie que de faire une proposition au hasard !

Si vous gagnez, on continue avec un gobelet supplémentaire, sinon on reprend au début avec un seul gobelet. Voyons maintenant à quelle série génératrice ce petit jeu nous fait aboutir.

On a donc $f_{n+1}(u) = \int_0^1 u f_n'(u)du + \int_0^u f_n(u)du$, ce qui mène à l'équation fonctionnelle

$$F(z,u) = 1 + z\left(\int_0^1 t\partial_u F(z,t)dt + \int_0^u F(z,t)dt\right)$$

$$= 1 + z\left(F(z,1) - \int_0^1 F(z,t)dt + \int_0^u F(z,t)dt\right)$$

$$F(z,u) = 1 + z\left(F(z,1) + \int_1^u F(z,t)dt\right) \tag{31}$$

En dérivant par rapport à u, on a donc

$$\partial_u F(z,u) = zF(z,u)$$

d'où $\ln F(z,u) = uz + C$ et donc $F(z,u) = K\exp(uz)$ (C et K sont des constantes par rapport à u). Nous allons déterminer K en réinjectant dans l'équation (31) la valeur obtenue pour $F(z,u)$.

$$K\exp(uz) = 1 + z\left(K\exp(z) + \left[\frac{1}{z}K\exp(tz)\right]_1^u\right)$$

$$K\exp(uz) = 1 + Kz\left(\exp(z) + \frac{\exp(uz)}{z} - \frac{\exp(z)}{z}\right)$$

$$K\exp(uz) = 1 + K\Big((z-1)\exp(z) + \exp(uz)\Big)$$

$$0 = 1 + K(z-1)\exp(z) \text{ d'où } K = \frac{e^{-z}}{1-z}$$

Ainsi

$$F(z,u) = \frac{\exp((u-1)z)}{1-z}.$$

Il s'agit bien sûr d'un exemple *ad hoc* ; on ne peut en règle générale espérer obtenir une forme close pour toutes les marches non homogènes en temps, toutefois on voit bien que l'on peut jouer sur des dépendances temporelles et alors aboutir sur des équations fonctionnelles intégrales.

3. Autres approches des ECO-systèmes

Dans [**97**], les auteurs relient une classe d'arbre de génération à des tableaux de Riordan. En se reposant sur la structure algébrique de ces derniers (les tableaux de Riordan « propres » constituent un groupe), ils donnent une moyen de construire un « opposé » (un inverse pour la multiplication) d'un arbre de génération. Ils donnent alors des exemples d'opposés de suites classiques.

Dans [**104**], en s'autorisant deux types d'étiquettes (les blanches et les noires, disons, en plus de) les auteurs étudient quelle règle donnerait une série génératrice égale à celle de la somme (produit, produit de Hadamard...) de deux séries génératrices associées à des ECO-systèmes donnés. Ils montrent également que n'importe quelle fraction rationnelle ne peut correspondre à la série génératrice d'un ECO-systèmes. Ils conjecturent que pour toute règle donnant une série génératrice rationnelle, on peut en fait trouver une règle *finie* (c'est-à-dire n'utilisant qu'un ensemble fini d'étiquettes) aboutissant à la même série génératrice rationnelle. Ils posent par ailleurs la question de savoir s'il existe toujours une règle qui corresponde à une série génératrice donnée. Ces problèmes sont reliés à la décidabilité de l'apparition de zéro dans une récurrence.

CHAPITRE 3

Marches aléatoires sur les graphes

Résumé : Ce chapitre étudie le temps de marquage (un temps de couverture pour lequel on ne marque qu'avec une certaine probabilité $p < 1$ chaque sommet visité) d'une marche aléatoire sur un graphe fini. On trouvera notamment

- au théorème 1 (p. 90), une formule générale pour le temps de marquage de n'importe quel graphe ;
- au théorème 2 (p. 92), une formule de type inclusion-exclusion (liée à la distribution stationnaire) pour le temps de marquage du graphe complet ;
- à la proposition 1 (p. 94), le fait qu'un graphe quelconque a asymptotiquement le même temps de marquage qu'un graphe complet « équivalent » ;
- au théorème 3 (p. 96), une forme intégrale (qui permet les calculs numériques !) pour ce temps moyen ;
- aux propositions 3 (p. 97) et 4 (p. 98), une jolie formule pour le temps de marquage des graphes équilibrés, puis des graphes réguliers.

Tous ces résultats généralisent ce qui était connu pour le *temps de couverture*, et on retrouve en particulier les résultats classiques du collectionneur de coupons généralisé ; ils résolvent une conjecture du probabiliste Robert Dobrow.

1. Préambule

Ce chapitre correspond à un article (travail effectué avec Robert P. Dobrow) présenté à SFCA/FPSAC'00, à Moscou en juin 2000 [**7**].

Étant donnée une marche aléatoire sur un graphe, le temps de couverture est le premier instant (nombre de pas) où chaque sommet a été atteint (couvert) par la marche. On définit le *temps de marquage* de la marche comme suit : lorsque la marche atteint un sommet v_i, on marque (ou « colore ») alors le sommet avec une probabilité p_i. Nous étudions le temps nécessaire à marquer tous les sommets. (Quand tous les p_i sont égaux à 1, on retombe sur le problème classique du collecteur de coupon.) Nous donnons des formules générales pour le temps de marquage d'un graphe. On fait le lien avec le problème du collectionneur de coupons généralisé.

Nous donnons alors les asymptotiques pour des petites valeurs de p_i. Les techniques utilisées appartiennent à la combinatoire des marches aléatoires, à la théorie des déterminants, à l'analyse et à des considérations probabilistes.

2. Temps de couverture généralisé

Le problème suivant fut proposé par Robert Dobrow lors d'un souper durant la rencontre « Analyse d'Algorithmes » de juin 1999, à Barcelone :

Conjecture 2 (Conjecture du souper). *Imaginons m convives autour d'une table, l'un d'eux détient la carafe d'eau et se verse, avec une probabilité p, de l'eau dans son verre. Il* *donne alors la carafe à son voisin de gauche ou de droite. Celui-ci fait de même et ainsi de suite. Appelons $T(p)$ le nombre de déplacements de la carafe nécessaires pour que tout le monde ait fini par se verser de l'eau. Que peut-on dire sur la valeur moyenne $E(T(p))$? En particulier, est-il vrai que $pE(T(p)) \to mH_m$ quand $p \to 0$? (H_m est le m-ième nombre harmonique).*

Nous montrerons que cette conjecture est en effet vérifiée.

Plus précisément, nous nous attaquerons à un problème plus général : imaginons un dîner pour lequel les convives sont plus ou moins en bons termes entre eux et ils vont donc passer la carafe de préférence à leurs amis !

Cette nouvelle formulation calque assez bien la dynamique du jeu Trivial Pursuit. Des joueurs déplacent leur pion sur le plateau de jeu en tentant de répondre à des questions sur différents domaines (*e.g.*, histoire, sports, etc.). Dans certains cas, si le joueur répond correctement, il obtient une portion de camembert d'une certaine couleur. Dans notre modèle simplifié du jeu, quand il a obtenu les portions de chaque couleur, il a gagné. Supposons que pour chaque domaine, le joueur ait une certaine probabilité de répondre correctement. Combien de temps une partie typique de Trivial Pursuit durera-t-elle alors ? Le lecteur devrait faire le lien avec le modèle suivant.

> Considérons une marche aléatoire (discrète) sur un graphe G connexe et orienté avec un ensemble de sommets $V = \{v_1, \dots, v_m\}$. Lorsque la marche aléatoire atteint le sommet v_i, ce sommet est *marqué* avec une probabilité p_i, $i = 1, \dots, m$. Nous nous intéressons au *temps de marquage* $T(\{p_1, \dots, p_m\})$, le premier instant auquel tous les sommets ont été marqués (au moins une fois).

Quand tous les p_i sont égaux à 1, il s'agit du problème classique du temps de couverture. Quand le graphe est complet et la marche aléatoire avance avec une probabilité uniforme sur chaque sommet, le problème se simplifie en celui du collectionneur de coupon. (*E.g.*, combien de paquets de cartes de Pokémon[1] doit-on acheter pour avoir une collection complète des personnages Pokémon ?) Il est bien connu que le temps moyen pour réunir une collection complète de m cartes équiprobables est mH_m, où $H_k := \sum_{i=1}^k i^{-1}$ est le k-ième nombre harmonique. C'est de manière équivalente le temps de couverture d'un graphe complet avec m sommets et équiprobabilité des transitions. Le problème généralisé du collectionneur de coupons consiste à trouver le temps de couverture du graphe complet dans le cas où les probabilités de transitions ne sont pas équiprobables (voir le survey [**23**] pour diverses applications). Il existe des résultats classiquement établis par la combinatoire (principe d'inclusion/exclusion [**122**], produit de mélange [**61**]) ou la théorie des probabilités (estimations de queues de distribution [**100**]). Nous donnons aussi quelques références à des problèmes de collectionneur de coupons pour d'autres graphes que le graphe complet [**54**] ; d'autres articles traitent de considérations asymptotiques [**39**].

Notre problème (qui implique deux niveaux d'aléa !) semble nouveau en combinatoire[2] et nous permet de retrouver et d'étendre des résultats déjà connus (pour le cas particulier p=1). Quand tous les p_i sont égaux (notons cette probabilité p), un joli résultat est que $pE(T(p))$ est

[1] Au moment où ceci a été rédigé, la déferlante Pokémon (qui devait plus tard frapper aussi en France) venait de s'abattre sur les États-Unis, et Bob Dobrow me disait « kids have a great craze for these cards. They trade them and stare at them a lot... :-) »

[2] Brigitte Chauvin me signale que ce point de vue du « double aléa » est par ailleurs un domaine de recherche actif pour les probabilistes qui regardent « des marches aléatoires en milieu alátoire ».

un nombre rationnel : en effet, on considère ici un processus markovien avec des probabilités de transitions rationnelles, le point de vue équivalent des automates finis implique la rationalité de la série génératrice sous-jacente, et calculer l'espérance n'est rien d'autre que l'évaluation en 1 de la dérivée de cette série, cette valeur est donc rationnelle !

Théoriquement, toutes les questions relatives à notre marche aléatoire peuvent être traitées en résolvant un système d'équations linéaires dicté par la matrice de transition de la chaîne de Markov mais une telle approche devient rapidement irréaliste d'un point de vue calculatoire, même pour des petites valeurs de m (le nombre de sommet). Sur le graphe complet, dans le cas de probabilités uniformes de marquage ($p_i = p$ pour tout i), et pour des probabilités π_i de ramasser tel coupon, une conjecture naturelle est que $E(T(p)) \sim (m/p)H_m$ lorsque $p \to 0$. La raison étant que pour des petites valeurs de p, on s'attend à ce que le temps nécessaire à marquer tel sommet suive une loi géométrique de paramètre p (et donc de moyenne $1/p$). Un raisonnement probabiliste rapide (mais erroné !) consiste à voir la probabilité de marquage p comme un changement d'échelle temporelle et ainsi on obtient (pour n'importe quel graphe) $E(T(p)) = E(T(1))/p$. Ce qui est faux (même asymptotiquement) ! Cependant, nous montrerons que cette intuition est vraie pour les graphes réguliers et nous prouvons le résultat plus général suivant : Pour n'importe quel graphe G, on a $pE(T(p)) \to K$ quand $p \to 0$, où K est le temps de couverture moyen pour le problème généralisé du collectionneur de coupons où l'ensemble des poids est la distribution stationnaire de la marche aléatoire. Ce résultat est prouvé à la section 5.

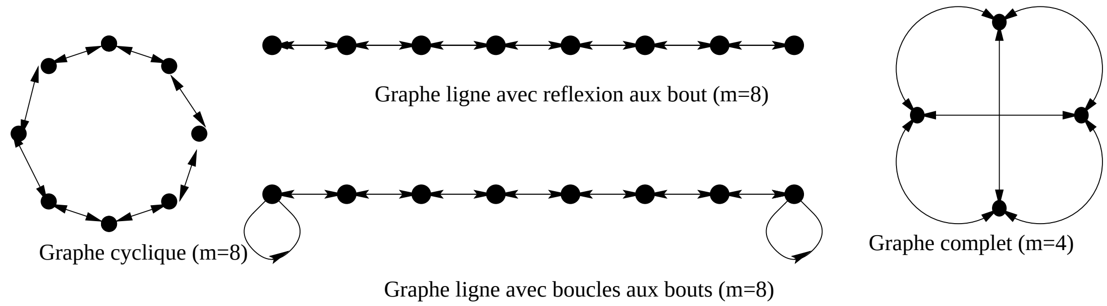


FIG. 1 – Quelques graphes orientés connexes considérés dans nos exemples.

Notation 2 (Graphe). *Pour tout ce chapitre, G est un graphe orienté fortement connexe*[3] *avec $v_1, \ldots, v_m$ comme sommets et une matrice de transition A (i.e., a_{ij} est la probabilité de transition de v_i vers v_j). La distribution stationnaire de ce graphe est notée $\pi_1, \ldots, \pi_m$. La probabilité de marquer le sommet v_i quand on le visite est notée p_i ($i = 1, \ldots, m$), et on pose $q_i := 1 - p_i$. Quand tous les p_i sont égaux, on note simplement p la probabilité de marquer un sommet. $\widetilde{G}$ est un graphe complet avec une matrice de transition $\widetilde{A}$ (relative en un certain sens à A, comme expliqué ci-après).*

En cas de 2-périodicité, les probabilités stationnaires dépendent la parité de la longueur n de la marche ; les résultat ci-après restent valides à condition de les relire avec les deux

[3]La forte connexité signifie qu'il existe un chemin (respectant l'orientation) reliant A à B, pour n'importe quel couple (A, B) de points. C'est équivalent à l'irréductibilité des markoviens.

familles de probabilités stationnaires (celles pour n pair d'une part, puis celles pour n impair d'autre part). De même, en cas de périodicité quelconque, il faut récrire nos résultats avec les probabilités stationnaires liées à la classe de congruence regardée pour n.

Notation 3 (Variables aléatoires). *T (resp. $\widetilde{T}$) est la variable aléatoire du temps d'attente qui correspond au premier moment où tous les sommets du graphe G (resp. $\widetilde{G}$) ont été marqués. La variable aléatoire X_i (resp. $\widetilde{X}_i$) donne le premier instant où le i-ième sommet du graphe G (resp. $\widetilde{G}$) est marqué.*

Notation 4 (Opérateurs). *On note $[z^n]S$ le coefficient de z^n dans une série S. Pour un sous-ensemble α de $\{1,\dots,m\}$, $|\alpha|$ désigne le cardinal de l'ensemble α et on note*

ζ_α la substitution $u_i \leftarrow 0$ pour $i \in \alpha$ tandis que u_i est inchangé pour $i \notin \alpha$,

σ_α la substitution $u_i \leftarrow q_i$ pour $i \in \alpha$ tandis que $u_i \leftarrow 1$ pour $i \notin \alpha$.

La même notation sera utilisée par rapport à n'importe quel autre jeu de variables formelles (par exemple avec $t_1,\dots,t_m$ à la place de $u_1,\dots,u_m$). Nous noterons en outre I la matrice identité et U la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $u_1,\dots,u_m$.

Exemples. Afin d'illustrer les notations ci-dessus : $[z^2]\,(1+4z^2+z^3) = 4$. Pour $m=4$ et $\alpha = \{1,2,4\}$, on a $\zeta_\alpha\,(3u_1+u_1u_2+u_3^3+u_4) = u_3^3$ et $\sigma_\alpha\,(3u_1+u_1u_2+u_3^3+u_4) = 3q_1+q_1q_2+1+q_4$.

Dans la suite, tous les graphes considérés ont m sommets ($m>1$) et sont orientés et fortement connexes : il existe une suite d'arêtes consécutives reliant n'importe quel couple de sommets. Premièrement, nous établissons une formule combinatoire pour le temps de marquage dans la section 2. On argue dans la section 3 d'une intuition probabiliste qui permet de simplifier le problème et ainsi de prouver la conjecture du souper dans la section 4, une autre preuve étant donnée en section 5. La dernière section traite de cas particuliers.

3. Temps de marquage sur un graphe quelconque

Nous donnons en premier lieu une formule de type série génératrice (basée sur des différences finies) pour $E(T(p))$, la valeur moyenne du *temps de marquage*. Nous engageons le lecteur à regarder la figure 2 (p. 93) pour un exemple de notre approche sur deux graphes de taille 3.

Théorème 1 (Formule générale pour le temps de marquage). *Le temps moyen pour marquer tous les sommets d'un graphe arbitraire G est donné par*

$$E(T(\{p_1,\dots,p_m\})) = \sum_{\alpha\neq\emptyset}(-1)^{|\alpha|+1}\sigma_\alpha u_1 \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \times (I-AU)^{-1} \times (1,0,\dots,0)$$

$$= \sum_{\alpha\neq\emptyset}(-1)^{|\alpha|+1}\sigma_\alpha \sum_{i=1}^{m} u_1 (I-AU)^{-1}_{1i},$$

où A, U, les p_i, α et les σ_α sont définis comme dans les notations 2 et 4 et où la somme porte sur tous les sous-ensembles α non vides de $\{1,\dots,m\}$.

Démonstration. Pour une matrice de transition A, l'entrée $A^n_{i,j}$ de A^n, donne une probabilité de déplacement de v_i à v_j en n étapes. Avec la matrice U définie comme dans la notation 4, les coefficients du monôme $u_1^{k_1}\cdots u_m^{k_m}$ dans $(AU)^n_{i,j}$ donne la probabilité que la marche aléatoire aille de v_i à v_j en n étapes telles que le sommet v_t est visité k_t fois, $t=1,\dots,m$. Ainsi la série génératrice de probabilité pour les marches sur le graphe (commençant en v_1), où z code la longueur de la marche et où les u_i codent le nombre de fois que la marche visite v_i est

$$F(z,u_1,\dots,u_m) = u_1 \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} z^k (AU)^k_{1,i} = u_1 \sum_{i=1}^{m} (I - zAU)^{-1}_{1,i}.$$

Rappelons que p_i (respectivement, $q_i := 1 - p_i$) est la probabilité de marquer (respectivement, de ne pas marquer) le sommet v_i.

Prenant en compte le fait que la marche visite tous les sommets en les marquant au moins une fois chacun, on aboutit à la substitution $u_i^n \leftarrow 1 - q_i^n$. Ceci justifie l'introduction d'un opérateur de différences $\Delta_i f(u_i) := f(1) - f(q_i)$. Ainsi $F^+ := \Delta_1\Delta_2\dots\Delta_m F$ donne la série génératrice de probabilité des marches qui marquent *tous* les sommets et on a en fait

$$F^+(z) = \sum_{\alpha\subseteq\{1,\dots,m\}} (-1)^{|\alpha|}\sigma_\alpha F(z,u_1,\dots,u_m),$$

i.e., F^+ est la somme de F évaluée sur l'ensemble σ_α (défini à la notation 4). Ainsi, la série génératrice de probabilité pour $T(\{p_1,\dots,p_m\})$ est $(1-z)F^+(z)$, donc

$$E(T(\{p_1,\dots,p_m\})) = \frac{\partial}{\partial z}_{|z=1}(1-z)F^+(z).$$

un changement de variable $1 - z = t$ et un développement local en $t = 0$ donne

$$\frac{\partial}{\partial z}_{|z=1}\sigma_\alpha\left(\frac{(1-z)u_1}{I - zAU}\right)_{ij} = -\sigma_\alpha\,(\mathrm{I} - AU)^{-1}_{ij}$$

Remarquons que $I - A$ n'est jamais inversible (alors que $\mathrm{I} - zA$ l'est toujours), ainsi, on doit traiter à part le cas de la substitution $\sigma_\emptyset$. $\square$

Remarquons que fixer les p_i à 1 donne une formule pour le problème du collectionneur de coupons.

4. L'intuition probabiliste

Nous nous restreignons ici à une discussion sur le cas des petites valeurs de p_i (d'une manière équivalente, vous pouvez penser à p petit avec $p := \max p_i$). Nous nous attendons à ce que la marche aléatoire se comporte, pour des petites valeurs de p, comme une marche aléatoire sur le graphe complet (*avec boucles*). Nous obtenons une nouvelle chaîne de Markov qui est « équivalente » à la chaîne de Markov originelle, au sens où elles ont toutes les deux les mêmes probabilités stationnaires. Soit $\{\pi_i\}_{i=1}^m$ la distribution stationnaire de la marche aléatoire sur G. Remarquons que π_i donne la probabilité que la marche soit au sommet v_i lors de son régime stationnaire (i.e., après un « assez long temps »). Quand p est petit, le temps nécessaire à marquer le graphe est élevé et la proportion du temps n passé dans le sommet v_i sera $\pi_i n + O(\sqrt{n})$ pour les grandes valeurs de n, avec une probabilité proche de 1. (Cela peut être montré, par exemple, par un théorème central limite pour les chaînes de Markov, ou par des résultats sur les grandes déviations).

Ainsi, pour des marches sur G « suffisamment longues » (quand p est petit, les marches sont presque sûrement « suffisamment longues »), le temps moyen nécessaire à marquer tous les sommets du graphe devrait être très proche du temps moyen nécessaire à marquer tous les sommets du graphe complet (*avec boucles*), mais dont les probabilités de présence en chaque sommet correspondent aux probabilités stationnaires du graphe d'origine. Notons $\widetilde{G}$ le graphe complet à m sommets (avec boucles). Soit $\widetilde{A}$ sa matrice de transition avec comme probabilités de transition $\widetilde{a}_{i,j} := \pi_j$ (for $i, j = 1, \ldots, m$). Considérons un processus de marche aléatoire (pour le problème de marquage) qui commence au sommet v_i avec probabilité π_i. Pour un tel processus, soit $\widetilde{X}_k$ la première fois que le sommet $\widetilde{v}_k$ soit marqué. Ainsi, les $\widetilde{X}_k$ sont des variables aléatoires géométriques de paramètre $\pi_k p_k$ et $P(\widetilde{X}_k = n) = \pi_k p_k (1 - \pi_k p_k)^{n-1}$, mais ne sont pas indépendants (car $\widetilde{X}_i \neq \widetilde{X}_j$ pour $i \neq j$).

Observons que $T = \max(X_1, \ldots, X_m)$ et $\widetilde{T} = \max(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_m)$. Considérons maintenant un nouveau processus sur le graphe, au lieu d'un seul « promeneur à randon[4] », considérons m particules, réparties sur l'ensemble des sommets et qui se déplacent simultanément aux sommets voisins selon le même mécanisme de transition, mais indépendamment les unes des autres. Si nous notons Y_i (et $\widetilde{Y}_i$) la première fois que le sommet v_i est marqué alors on observe que Y_i a la même distribution que X_i mais que les Y_i sont indépendants tandis que les X_i ne le sont pas. Définissons maintenant $Z = \max(Y_1, \ldots, Y_m)$ et $\widetilde{Z} = \max(\widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_m)$. Notre intuition est la suivante : puisque les $\widetilde{Y}_i$ et les Y_i se comportent d'une manière similaire pour p petit, on devrait avoir $E(\widetilde{Z}) \approx E(Z)$. Comme les marquages simultanés (pour le processus Y) n'occurrent qu'avec probabilité $O(p^2)$, on a que $E(Z) \approx E(T)$. Aussi $E(\widetilde{Z}) \approx E(\widetilde{T})$ et donc $E(T) \approx E(\widetilde{T})$. Par conséquent, l'étude du temps moyen de marquage du graphe $\widetilde{G}$ devrait donner la réponse à notre question originale sur le temps moyen de marquage du graphe G. Nous rendons les arguments ci-dessus rigoureux dans la prochaîne section.

5. Preuve combinatoire et algébrique

Je rappelle que nous souhaitons prouver que les temps de marquage des graphes G et $\widetilde{G}$ sont équivalents asymptotiquement quand $p \to 0$ (avec $p_i = p$ pour $i = 1, \ldots, m$).

Théorème 2 (Forme close via la distribution stationnaire). *Soit $\widetilde{G}$ un graphe complet avec probabilités de transition $\widetilde{a}_{i,j} := \pi_j$. Le temps moyen $E(\widetilde{T})$ pour marquer tout le graphe $\widetilde{G}$ est $1/p$ fois le temps nécessaire pour visiter tous les sommets*

$$E(\widetilde{T}) = \frac{1}{p} E(\text{ collectionneur de coupons sur } \widetilde{G}),$$

et on a une formule d'inclusion-exclusion

$$E(\widetilde{T}) = \frac{1}{p} \sum_{\alpha \neq \emptyset} \frac{(-1)^{m-|\alpha|}}{-\zeta_\alpha(\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m)},$$

où les ζ_α sont définies comme dans la notation 4.

Démonstration. Considérons les π_i, les q_i et les p_i comme des variables formelles, alors

$$\operatorname{Prob}(\widetilde{T} \leq n) = \{p_1^{>0}\} \ldots \{p_m^{>0}\} (\pi_1 p_1 + \pi_1 q_1 + \cdots + \pi_m p_m + \pi_m q_m)^n,$$

où $\{p_1^{>0} S\}$ (avec $S \in \mathbb{R}[[p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m]]$) désigne la somme des monômes en p_1 d'exposants positifs dans S. Ainsi, on a

$$\operatorname{Prob}(\widetilde{T} \leq n) = \sum_{\alpha \subseteq \{1, \ldots, m\}} (-1)^{|\alpha|} (\zeta_\alpha(\pi_1 p_1 + \pi_1 q_1 + \cdots + \pi_m p_m + \pi_m q_m))^n,$$

[4]un chemin à randon est « étymologiquement » une terminologie fort honorable pour une marche aléatoire puisque le « random » des anglais vient de l'ancien français randon, et du verbe verbe randonner, « courir impétueusement », l'origine étant francique (cf. run en anglais et rennen en allemand).

où les substitutions ζ_α opèrent sur les p_i et sont définies comme dans la notation 4. En multipliant par z^n et en sommant pour $n \geq 0$, quand tous les p_i sont égaux à p et en faisant alors agir les substitutions ζ_α sur les π_i, on obtient

$$\sum \mathrm{Prob}(\widetilde{T} \leq n) z^n = \sum_{\alpha \subseteq \{1,\ldots,m\}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{1 - z(q + p\zeta_\alpha(\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m))}.$$

En multipliant par $1 - z$ et en dérivant en $z = 1$, cela donne le temps moyen

$$E(\widetilde{T}) = \sum_{\alpha \neq \emptyset} (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{p(-1 + \zeta_\alpha(\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m))}.$$

□

On retrouve ainsi par l'algèbre un résultat connu par ailleurs, notamment grâce à la théorie des produits de mélanges (shuffles) [**61**].

	graphe G	graphe $\widetilde{G}$
matrice de transition	$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 1/4 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
distribution stationnaire	$(3/8,\, 3/8,\, 1/4)$	$(3/8,\, 3/8,\, 1/4)$
	$U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 \end{pmatrix}$	$U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 \end{pmatrix}$
matrice génératrice de la marche	$(I - zAU)^{-1}$	$(I - z\widetilde{A}U)^{-1}$
temps moyen de couverture	$95/12 \simeq 7.91$	$29/5 \simeq 5.80$
temps moyen de marquage (forme close)	$\dfrac{435 + 494p + 187p^2 + 24p^3}{75p + 60p^2 + 9p^3}$	$29/5p^{-1}$
temps moyen de marquage (asymptotique)	$E(T(p)) = 29/5p^{-1} + O(1)$	$E(\widetilde{T}(p)) = 29/5p^{-1}$

FIG. 2 – Exemple de notre approche sur un graphe de taille 3. La plupart des résultats de la littérature portent sur le temps (moyen) de couverture de la colonne $\widetilde{G}$ (et sur des moments d'ordre supérieurs). Pour le graphe originel (la colonne G), le défaut d'indépendance est la principale difficulté. L'approche algébrique, afin d'obtenir la dernière case de la colonne G, est la suivante : considérer les premières cases de la colonne G, traiter alors la colonne $\widetilde{G}$ dont la dernière case donne le résultat recherché (pour G).

Proposition 1. *Le temps de marquage T du graphe G peut être approximé par le temps de marquage $\widetilde{T}$ du graphe complet associé $\widetilde{G}$:*

$$E(\widetilde{T}) - E(T) = O(1), \qquad (p \to 0).$$

Démonstration. Afin de montrer que $E(\widetilde{T}) - E(T) = O(1)$, *i.e.*

$$\sum_{\alpha\neq\emptyset}(-1)^{|\alpha|+1}\sigma_\alpha\sum_{i=1}^{m}u_1(I-\widetilde{A}U)^{-1}_{1i} - \sum_{\alpha\neq\emptyset}(-1)^{|\alpha|+1}\sigma_\alpha\sum_{i=1}^{m}u_1(I-AU)^{-1}_{1i} = O(1)$$

où les substitutions sont définies comme dans la notation 4, il est suffisant de vérifier que

$$[p^{-1}]\sigma_\alpha(I-\widetilde{A}U)^{-1}_{ij} - [p^{-1}]\sigma_\alpha\,(I-AU)^{-1}_{ij} = O(1). \tag{32}$$

En fait, on a $(I-zA)^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{1-z} + O(1) = (I-z\widetilde{A})^{-1} + O(1)$. Ceci est établi en écrivant $A = P + R$, ce qui décompose A comme une projection sur le sous-espace propre associé au vecteur propre π, plus la projection R sur l'espace supplémentaire (il est classique que $P^n = P = \widetilde{A}$ et $PR = RP = 0$), ainsi $\sum z^n(P+R)^n = \frac{\widetilde{A}}{1-z} + (I-zR)^{-1}$ où $(I-zR)^{-1}$ est en fait régulier en $z=1$ (car, selon la théorie de Perron–Frobenius, 1 est une valeur propre de multiplicité 1), ainsi $(1-zR)^{-1} = O(1)$. Ceci règle donc le cas de l'égalité (32) lorsque $\alpha = \{1,\dots,m\}$ (considérer simplement $z = 1-p$).

Les autres cas apparaissent comme une perturbation de deux matrices non inversibles ($I-A$ et $I-\widetilde{A}$), ce qui donne

$$\begin{cases}(I-A+\epsilon B)^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{-\epsilon\lambda'(0)} + O(1)\\ (I-\widetilde{A}+\epsilon\widetilde{B})^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{-\epsilon\lambda'(0)} + O(1)\end{cases}$$

où B est A avec sa i-ième colonne remplacée par des 0 chaque fois que $i\in\alpha$ (ainsi $A-\epsilon B = \sigma_\alpha AU$), et où $\lambda(\epsilon)$ est la perturbation de la valeur propre 1, donc $\lambda'(0) = \sum_{i\in\alpha}\pi_i$. Voir [**84**] pour l'analycité des perturbations des projections, valeurs propres, etc.

□

Pour les personnes avec des affinités probabilistes, nous donnons ci-dessous une autre approche qui montre également que $E(T) = E(\widetilde{T}) + O(1)$ lorsque $p\to 0$.

6. Preuve analytique et probabiliste

La proposition suivante (identique à la proposition 1) est le point clef

Proposition 2 (Équivalence des temps moyens). *Le temps de marquage T du graphe G et le temps de marquage T du graphe complet associé $\widetilde{G}$ ont la même asymptotique au premier ordre, i.e.*

$$E(T) = E(\widetilde{T}) + O(1).$$

Démonstration. L'idée principale est la suivante

$$T \approx (T \text{ sans ses queues}) \approx (\widetilde{T} \text{ sans ses queues}) \approx \widetilde{T},$$

où $\approx$ signifie ici que les moyennes sont les mêmes au premier ordre asymptotique lorsque $p\to 0$. Remarquons que

$$P(T\le n) = \sum_{\lambda=(n_1,\dots,n_m)} p_\lambda c_\lambda,$$

où la somme est sur tous les m-uplets positifs $\lambda = (n_1,\dots,n_m)$ tels que $\sum_k n_k = n$ et où p_λ est la probabilité que la marche mette n étapes et visite chaque sommet v_k n_k fois (où

$k = 1, \ldots, m$), et où c_λ est la probabilité que tous les sommets soient marqués par une telle marche, i.e., $c_\lambda = \prod_{j=1}^m (1 - (1-p)^{n_j})$. Définissons l' « intervalle central » I comme

$$I := \left[\frac{1}{p|\ln p|}, \frac{|\ln p|}{p}\right].$$

Définissons de plus la « boîte multidimensionnelle » B comme

$$B := \prod_{i=1}^m [n\pi_i - \sqrt{n}\ln n, n\pi_i + \sqrt{n}\ln n].$$

Pour p petit et pour n grand, par un résultat classique de la théorie des grandes déviations, on a

$$n\pi_j - \sqrt{n}\ln n < n_j < n\pi_j + \sqrt{n}\ln n$$

(i.e., $\lambda \in B$) avec probabilité $1 - \exp(-c\ln^2 n)$ (avec $c > 0$, voir [**2**]). Comme $\mathrm{Prob}(T = n)$ est la probabilité qu'un succès ait lieu exactement à la n-ième étape, on a

$$E(T) = \sum_{n \geq 0} (1 - \mathrm{Prob}(T \leq n)). \tag{33}$$

Cette somme peut être séparée comme suit (avec de nombreuses notations abusives mais naturelles !)

$$E(T) = \sum_{n<I} + \sum_{n \in I, \lambda \in B} + \sum_{n \in I, \lambda \notin B} + \sum_{n>I, \lambda \in B} + \sum_{n>I, \lambda \notin B} \tag{34}$$

où, par exemple, $n < I$ signifie pour n avant l' « intervalle central » I. La première somme est majorée par la longueur de l'intervalle de sommation, qui est $o(1/p)$ lorsque $p \to 0$, les sommes pour $\lambda \notin B$ sont bornées par $\exp(-c\ln^2 n)$ de même que la somme restante pour $n > I$.

On se concentre maintenant sur la somme sur I et B. Par un théorème limite sur les chaînes de Markov [**2**], p_λ suit asymptotiquement une loi gaussienne multidimensionnelle $g(\lambda)$, ainsi la relation (33) devient

$$E(T) = \sum_{n \in I} \left(1 - \sum_{\lambda \in B} g(\lambda) c_\lambda\right) + o(p^{-1}). \tag{35}$$

Le même schéma peut être appliqué à $\widetilde{G}$, avec le même intervalle central I et la *même* boîte B (puisque les deux marches ont la même distribution stationnaire). Ainsi $E(T) = E(\widetilde{T}) + o(p^{-1}) = E(\widetilde{T}) + O(1)$, puisque $E(\widetilde{T})$ et $E(T)$ sont des *fractions rationnelles* en p (voir les théorèmes 1 et 2). $\square$

Le théorème ci-dessus est le principal résultat de ce chapitre et répond précisément à la conjecture du souper. La formule suivante, de type intégral, est bien connue (cf. [**61**], où elle est établie pour le graphe complet au moyen du produit de mélange et de la transformée de Laplace), mais nous donnons ici une autre preuve, valide pour tout graphe.

Théorème 3 (Asymptotique au premier ordre. Forme intégrale). *Pour un graphe G avec un distribution stationnaire $(\pi_1, \ldots, \pi_m)$, le temps moyen de marquage est*

$$E(T) = \frac{K}{p} + O(1), \qquad \text{où} \quad K = \int_0^\infty \left(1 - \prod_{j=1}^m (1 - \exp(-\pi_j x))\right) dx.$$

Démonstration. Avec les mêmes notations que plus haut, le point de départ est

$$c_\lambda = c_{(n_1,\ldots,n_m)} = \prod_{j=1}^{m}(1-(1-p)^{n_j}) = \prod_{j=1}^{m}(1-e^{-p'n_j}),$$

où $p' := -\ln(1-p)$. Ainsi la relation (35) donne

$$E(T) = \sum_{n\in I}\left(1 - \sum_{\lambda\in B} g(\lambda)\prod_{j=1}^{m}\big(1-\exp(-p'n_j)\big)\right) + O(1).$$

Dans la boîte B, $n_j = n\pi_j + \epsilon_j\sqrt{n}\ln n$ (où $|\epsilon_j|<1$), donc

$$c_\lambda = \prod_{j=1}^{m}\big(1-\exp(-p'n\pi_j - p'\epsilon_j\sqrt{n}\ln n)\big)\text{, et ainsi}$$

$$E(T) = \sum_{n\in I}\left(1 - \sum_{\lambda\in B} g(\lambda)\prod_{j=1}^{m}\big(1-\exp(-p'n\pi_j - p'\epsilon_j\sqrt{n}\ln n)\big)\right) + O(1).$$

Maintenant, en majorant $\sum g(\lambda)$ par $1-\exp(-c\ln^2 n)$, on obtient

$$E(T) = \sum_{n\in I}\left(1 - \prod_{j=1}^{m}\big(1-\exp(-p'n\pi_j - p'\epsilon_j\sqrt{n}\ln n)\big)\right) + O(1) + o(p^{-1}).$$

La somme portant sur $p^{-1}/|\ln p| \le n \le p^{-1}|\ln p|$, cela mène à

$$\begin{aligned}\sum_{n\in I}\exp\left[-p'O(n)\right]\big(1-\exp[-p'o(n)]\big) &\le \sum_{n\in I}\big(1-\exp[-p'o(n)]\big)\\ &\le \sum_{n\in I}p'o(n) \le p'p^{-1}|\ln p|\,o(p^{-1}|\ln p|) = o(p^{-1}),\end{aligned}$$

et compléter les queues donne

$$E(T) = \sum_{n\in I}\left(1 - \prod_{j=1}^{m}\big(1-\exp(-p'n\pi_j)\big)\right) + O(1) + o(p^{-1}).$$

$$= \sum_{n\ge 0}\left(1 - \prod_{j=1}^{m}\big(1-\exp(-p'n\pi_j)\big)\right) + O(1) + o(p^{-1}). \tag{36}$$

En effet, la complétion à gauche de la somme ($n<I$) est $\le p^{-1}/|\ln p| = o(p^{-1})$ et la complétion à droite de la somme ($n>I$) est $\le \sum_{n>p^{-1}|\ln p|} 2^m\binom{m}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\exp(-p'm\min(\pi_i))^n = o(p^{-1})$ (si $\min(\pi_i)\neq 0$, ce que l'on sait par ailleurs vrai de par la signification combinatoire du problème).

Posons $f(x) := 1-\prod_{j=1}^{m}(1-\exp(-p'x\pi_j))$. Puisque $f'(x)$ a une décroissance suffisamment rapide vers 0 en $+\infty$, la formule d'Euler–Maclaurin donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) - \int_0^\infty f(x)dx = \frac{f(0)+f(\infty)}{2} + \int_0^\infty (x-\lfloor x\rfloor - 1/2)f'(x)dx$$

$$\leq \frac{f(0)+f(\infty)}{2} + \int_0^\infty \frac{1}{2} f'(x)dx = f(\infty) = 1.$$

En appliquant ceci à la formule (36), on aboutit à

$$E(T) = \frac{1}{p'} \int_0^\infty \left(1 - \prod_{j=1}^{m} (1 - \exp(-\pi_j x))\right) dx + O(1) \text{ quand } p' \to 0.$$

Puisque $p' = p + o(p)$, on a le résultat de l'énoncé. □

La « formule intégrale » permet de calculer $E(T)$ à n'importe quelle précision en temps linéaire (puisque les fonctions intégrées ont un comportement suffisamment gentil), alors que les formules des théorèmes 1 et 2 sont inefficaces pour les applications numériques avec de grandes valeurs de m car elles comportent 2^m sommants.

7. Quid des graphes équilibrés ou réguliers ?

La modèle le plus habituel pour une marche aléatoire sur un graphe (le cas non pondéré) consiste à supposer qu'un sommet particulier est atteint avec une probabilité proportionnelle au degré de ce sommet. Il est connu que la distribution stationnaire d'une telle marche aléatoire est reliée au degré des sommets. Un graphe est dit « équilibré » si chaque sommet a autant d'arêtes sortantes que d'arêtes rentrantes et si chacune des arêtes sortantes est équiprobable. Pour un graphe équilibré, il existe une relation simple entre la distribution stationnaire (le vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1 de la matrice de transition du graphe) et les degrés des sommets :

Lemme 1 (Distribution stationnaire pour les graphes équilibrés). *Pour les graphes équilibrés, on a* $\pi_i = \frac{N_i}{\sum_1^m N_i}$ *(N_i est le nombre d'arêtes rentrantes du sommet v_i).*

DÉMONSTRATION. Soit N_{ij} le nombre d'arêtes de v_i vers v_j, N_{*j} le nombre d'arêtes rentrantes dans v_j et soit N_{i*} le nombre d'arêtes sortantes de v_i. Les entrées de la matrice d'adjacence A sont ainsi $a_{ij} := \frac{N_{ij}}{N_{i*}}$. Le vecteur propre à gauche de la matrice A (pour la valeur propre 1) vérifie

$$(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) \begin{pmatrix} N_{11}/N_{1*} & \ldots & N_{1m}/N_{1*} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{m1}/N_{m*} & \ldots & N_{mm}/N_{m*} \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m);$$

donc $\sum_i \pi_i \frac{N_{ij}}{N_{i*}} = \pi_j$. Cette équation est satisfaite par $\pi_i := \frac{N_{*i}}{\sum_1^m N_{*j}}$ lorsque $N_{i*} = N_{*i}$, cette dernière égalité étant elle-même vérifiée par définition des graphes équilibrés. □

Le théorème 2 se récrit alors :

Proposition 3 (Graphes équilibrés). *Pour les graphes équilibrés avec $N = \sum N_i$ arêtes, on a*

$$E(T) = \frac{N}{p} \sum_{\alpha \neq \emptyset} \frac{(-1)^{m-|\alpha|}}{-\zeta_\alpha(N_1 + N_2 + \cdots + N_m)} + O(1),$$

où les substitutions ζ_α opèrent sur les $\{N_j\}$.

DÉMONSTRATION. Conséquence directe du théorème 2 et de la proposition 1. □

Il y a plusieurs classes de graphes pour lesquels la formule peut être simplifiée. La plus intéressante, la classe des graphes régulier (les graphes pour lesquels *tous* les sommets ont le même nombre d'arêtes sortantes et entrantes), fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4 (Graphes réguliers). *Quand tous les π_i sont égaux (en particulier si G est un graphe régulier et si les arêtes sortantes sont choisies uniformément au hasard), on a $E(T) = \frac{mH_m}{p} + O(1)$.*

DÉMONSTRATION.

$$E(\widetilde{T}) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \frac{1}{p(-1 + \frac{m-i}{m})} = \frac{m}{p} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \binom{m}{i} \frac{1}{i} = \frac{mH_m}{p}.$$

L'évaluation de la somme binomiale par le nombre harmonique H_m est un résultat classique de calcul des différence finies qui peut se vérifier par la tranformée d'Euler : puisque $\ln(1+z) = \sum_{i\geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} z^i$, on a $\sum_m \left(\sum_{i=1}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^{i+1}}{i}\right) z^m = \frac{1}{1-z} \ln(1 + \frac{z}{1+z}) = -\frac{\ln(1-z)}{1-z}$ qui est bien connu pour générer les nombres harmoniques (car $\ln((1-z)^{-1})$ génère les inverses des entiers).

On aurait également pu utiliser le théorème 3 ; en développant le produit sous l'intégrale : $\int_0^\infty (1 - \prod_{j=1}^m (1 - \exp(-x/m)))\, dx = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} (-1)^{k+1} \frac{m}{k}$, qui se simplifie comme précédemment en mH_m. Une troisième preuve de cette formule est probabiliste et considère le maximum de variables géométriques i.i.d. Ainsi, lorsque $\pi_i = 1/m$ (pour $i = 1, \ldots, m$), on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}(\widetilde{Z} = n) &= \sum_i \mathrm{Prob}(\widetilde{X}_i = n) \prod_{j\neq i} \mathrm{Prob}(\widetilde{X}_j < n) \\ &= m \left(\frac{p}{m}(1 - \frac{p}{m})^{n-1}\right) (1 - (1 - \frac{p}{m})^{n-1})^{m-1}.\end{aligned}$$

Puisque $E(\widetilde{T}) = \sum_{n\geq 1} n\, \mathrm{Prob}(\widetilde{T} = n)$, on s'intéresse au coefficient du terme de plus bas degré dans le développement en série de Laurent en $p = z = 0$ de

$$F_m(z) = \sum_{n\geq 1} nz(1 - \frac{z}{m})^{n-1}(1 - (1 - \frac{z}{m})^{n-1})^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} \frac{z}{(1 - (1 - z/m)^{k+1})^2}.$$

Comme $(1 - (1 - z/m)^{k+1})^2 = O(z^2)$ lorsque $z \to 0$, la valuation du développement de $z\left(1 - (1 - z/m)^{k+1}\right)^{-2}$ est -1 (et le résidu est $m^2/(k+1)^2$). Ainsi le coefficient du terme de plus petit degré de $F_m(z)$ est la somme des résidus de la fraction rationnelle :

$$\mathrm{Res}(F_m(z), z = 0) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} \frac{m^2}{(k+1)^2} = mH_m.$$

□

8. Exemples

La formule pour le temps moyen dans le problème du collectionneur de coupons se simplifie en $\frac{m^2-m+2}{2}$ dans le cas du graphe cyclique C_m, en $m^2 - 2m + 2$ pour le graphe ligne L_m (avec réflexion aux extrémités) et en $(m-1)H_{m-1} + 1$ pour le graphe complet avec boucles K_m.

Pour L_m, il y a équivalence entre le problème du collectionneur de coupons et la marche aléatoire (avec sauts $+1, -1$) de 0 à m et de hauteur $\leq m$; une telle marche aléatoire est reliée à la théorie des fractions continuées et a une série génératrice qui s'exprime comme un quotient de polynômes de Chebyshev (voir aussi le chapitre I).

Nous appliquons ci-dessous la formule du théorème 1 à tous les graphes fortement connexes (non orientés et non isomorphes et sans multiplicité) qui ont au plus 4 sommets. Pour chacun, nous donnons sa distribution stationnaire, le temps moyen du problème classique du collectionneur de coupons et, dans la dernière colonne, le coefficient de p^{-1} (le coefficient de tête) dans l'asymptotique du temps moyen de marquage du graphe considéré :

taille	graphe	distribution stationnaire	moyenne du temps de couverture	moyenne du temps de marquage
$m=1$	K_1	(1)	1	1
$m=2$	K_2	(1/2, 1/2)	2	3
$m=3$	K_3	(1/3, 1/3, 1/3)	4	$3H_3$=11/2
$m=3$	L_3	(1/4, 1/2, 1/4)	5	19/3
$m=4$	L_4	(1/6, 1/3, 1/3, 1/6)	10	99/10
$m=4$	K_4	(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)	13/2	$4H_4$=25/3
$m=4$	C_4	(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)	7	$4H_4$=25/3
$m=4$	Y_4	(1/5, 2/5, 1/5, 1/5)	10	110/10
$m=4$	T_4	(1/8, 3/8, 1/4, 1/4)	163/15	369/35
$m=4$	Q_4	(3/10, 1/5, 1/5, 3/10)	69/10	62/7

Les graphes K_m, L_m et C_m sont définis comme plus haut ; T_4 est le graphe triangulaire avec une queue ; Y_4 a une forme en Y et Q_4 est le carré avec une de ses diagonales. Nous rappelons que comme vu dans les sections précédentes, pour le graphe complet avec boucles, le temps du collectionneur de coupons est mH_m et le temps de marquage est mH_mp^{-1}. Il en est finalement de même pour les graphes réguliers, qui sont ainsi ceux pour lesquels la conjecture du souper tient telle quelle.

Je finissais mon article en remerciant Philippe Flajolet et en citant une de ses pseudo-reformulations de notre problème : « Tu es un doctorant qui essaye de prouver un théorème ; soit p ta chance de succès à chaque tentative (p est proche de zéro, bien sûr). Notons T le temps qu'il te faudra pour prouver le théorème... »

9. Perspectives

Je compte poursuivre l'étude de « temps de couverture généralisés » pour les marches sur les graphes, notamment en considérant un problème suggéré par Gilles Schaeffer : on collectionne des coupons pour reconstituer une équipe de foot en les achetant par paquet de 11 cartes (chaque paquet contient 1 joueur pour chaque numéro, mais éventuellement originaire de différents clubs). La question est de savoir combien de paquets on doit acheter avant d'avoir une équipe complète. Cela revient à étudier le minimum de 11 problèmes de collectionneur de coupons évoluant en parallèle.

J'espère également pouvoir appliquer le type d'approches présentées dans ce chapitre à un problème plus délicat de coagulation de particules sur un graphe.

On considère un graphe $G = (V, E)$ fortement connexe. Au temps 0, une particule est placée sur chaque sommet de V. Au temps t, on tire au sort l'une des N_t particules présentes. Celle-ci se déplace sur un sommet adjacent et s'agglomère à celle qui y était déjà (s'il y en avait une).

Soit N_t = Nombre de particules au temps t. (N_t) est clairement une fonction décroissante de t. On pose alors $T_k = \inf\{t|N_t = k\}$, le premier temps où il ne reste que k particules.

Ce modèle amène de nombreuses questions :

- Quelle est la loi de T_1, ses moments ?
- Pour quels graphes G obtient-on de « jolies » formules ?
- Comment varie le comportement de T avec la taille du graphe ? Sa géométrie ?
- Si $G_1 = (V, E_1)$,$G_2 = (V, E_2)$ et $E_1 \subset E_2$, a-t-on $T_{G_1} \geq_S T_{G_2}$? Autrement dit, le temps d'agglomération est-il une fonction décroissante du nombre d'arêtes ?
- Que se passe-t-il si l'on suppose que les particules coagulent avec probabilité p ?
- Peut-on généraliser au cas où la particule change de site de façon non uniforme ?

Il s'agit bien sûr d'un programme « à long terme », et ne répondre déjà qu'à une partie de la première question serait un grand contentement. David Aldous et James Fill consacrent d'ailleurs un chapitre de leur livre à venir [**2**] à ces problèmes d' « Interacting Particles on Finite Graphs », et n'ont des résultats explicites (*e.g.*, sur $\mathbb{E}(T_1)$) que pour des graphes très simples.

Trouver la moyenne de T_1 est parfois connu sous le nom peu politiquement correct de « problème des tueurs corses » (au bout de combien de temps ne restera-t-il qu'un seul tueur sachant qu'il y en a initialement un sur chaque sommet, qu'ils se déplacent à tour de rôle de sommet en sommet, et qu'en cas de rencontre, un seul survit ?).

C'est sous ce nom que Jean-François Marckert m'avait initialement présenté le problème, j'espère avancer avec lui dans l'étude de cette plaisante question.

CHAPITRE 4

Asymptotique de différents paramètres de marches

Résumé : Différents paramètres liés aux marches ont déjà été étudiés par les probabilistes, qui ont obtenus des asymptotiques au « premier ordre » grâce à l'universalité du mouvement Brownien et de ses dérivées. Les théories probabiliste et combinatoire s'appliquent pour les marches de Łukasiewiecz (celles qui ont un seul saut vers l'arrière, d'amplitude -1) qui sont en correspondance avec des familles d'arbres.

Les principaux résultats de ce chapitre sont des développements asymptotiques complets (fournis par la combinatoire analytique grâce à nos formules du chapitre 1), non seulement pour les marches de type Łukasiewiecz mais pour toutes les marches à sauts bornés, pour

- le nombre de $\mathbb{Z}$-excursions, via une méthode de col (théorème 1, p. 105) ;
- le nombre de $\mathbb{N}$-excursions, via un principe de conjugaison et de l'analyse de singularités (théorème 2, p. 107) ;
- le nombre de $\mathbb{N}$-chemins (théorème 3, p. 112) ;
- le nombre de retours en zéro d'une $\mathbb{N}$-excursion, *i.e* le nombre de facteurs d'un mot de Dyck généralisé et la loi limite correspondante (théorème 4, p. 114) ;
- les lois limites pour l'asymptotique de l'altitude finale moyenne d'un $\mathbb{N}$-chemin, (théorème 6, p. 117) ;

Nous finirons par deux sections un peu plus prospectives sur la hauteur et l'aire des $\mathbb{N}$-excursions.

Ce chapitre établit sous une forme rigoureuse et complète plusieurs résultats esquissés dans le programme décrit par mon mémoire de DEA [**4**]. Certains des résultats feront l'objet d'un article en préparation avec Ph. Flajolet.

1. Préambule

Nous nous replaçons ici dans le cadre des marches aléatoires du chapitre I (les marches de « type fini »). Il s'agit de revisiter la méthode du noyau sous un angle *singulier*! Le cas des marches où l'on ne fait qu'avancer par des pas bornés et reculer d'un pas de longueur 1 conduit à un noyau $u - z\phi(u) = 0$ (où ϕ est le polynôme caractéristique de la marche multiplié par u). Ce sont typiquement ces équations qui définissent les séries génératrices de diverses familles d'arbres (Cayley, binaire, unaire-binaire...). La fonction u est ainsi définie de façon implicite. Néanmoins, l'asymptotique de ces coefficients est connue ; on trouvera dans [**70**] le résultat de Meir et Moon en $\frac{A}{\rho^n\sqrt{\pi n^3}}$ où A et ρ sont des nombres algébriques explicitables.

Depuis quelques années, on sait que les asymptotiques en $\rho^{-n}n^{-3/2}$ surgissent pour tous les objets combinatoires engendrés par une grammaire algébrique (vérifiant de surcroît une certaine contrainte de connexité). Ce théorème de Drmota–Lalley–Woods[1] ne donne pas le

[1]Le théorème de « Drmota–Lalley–Woods » a essentiellement été trouvé par ces trois auteurs, indépendamment les uns des autres. Cette terminologie est empruntée au chapitre 8 de [**70**], où l'on trouvera une preuve de ce théorème fondamental.

« ρ », quoique l'on sache que ce problème soit par ailleurs décidable (c'est l'un des récents ajouts de Flajolet au livre [**70**]). Cette décidabilité n'étant cependant effective que pour des instances numériques, elle ne nous est ici que de peu de secours car nous considérons une classe entière d'instances. Nous montrons dans ce chapitre que le résultat en $\frac{A}{\rho^n\sqrt{\pi n^3}}$ (avec A et ρ explicités) se maintient pour une plus large classe de fonctions, à savoir celles « définies » à partir d'une équation de noyau[2] $u^c - z\phi(u) = 0$ (où c est un entier positif et où ϕ est un polynôme général). Il se trouve que les marches à sauts bornés sur $\mathbb{N}$ (et les excursions sur $\mathbb{Z}$) mènent à ce type d'équation.

2. Nombre asymptotique d'excursions sur $\mathbb{Z}$

Pour une marche à sauts bornés sur $\mathbb{Z}$, la série génératrice est $F(z,u) = \frac{1}{1-zP(u)}$, cela donne directement une asymptotique $f_n(1) = P(1)^n$ pour les chemins ; pour les excursions[3] sur $\mathbb{Z}$, nous allons donner l'asymptotique de $f_n(0) = [u^0]P(u)^n$ à l'aide d'une méthode de col. Il convient pour ce faire de déterminer en premier lieu quel col nous allons exploiter. La sous-section suivante montre qu'il s'agit de l'unique col de P sur $\mathbb{R}^+$.

2.1. Existence et unicité du point col réel positif. Nous allons traiter l'asymptotique des marches pour des fonctions un peu plus générales que celles qui interviennent dans les marches de type fini :

Définition 7. *Nous qualifierons d'***admissibles** *les fonctions appartenant à la (large) classe de séries entières ϕ suivantes :*
- *ϕ est à coefficients positifs ou nuls ;*
- *$\phi(0) \neq 0$;*
- *ϕ n'est pas constante ;*
- *ϕ a un rayon de convergence R soit infini, soit fini sous la réserve que $\phi'(R^-) = +\infty$.*

On définit le degré de ϕ comme étant le degré usuel si ϕ est un polynôme, et comme valant $+\infty$ sinon. Pour une marche à sauts bornés, si l'on pose $\phi(u) := u^cP(u)$ où P est le polynôme de Laurent caractéristique de la marche (de valuation $-c \leq -1$ et de degré $d > 0$), on voit que nous avons une fonction admissible au sens précédent. Si l'opérateur caractéristique $P(u)$ de la marche est non plus un polynôme de Laurent mais une série de Laurent (c'est-à-dire que la valuation $-c$ est un entier et que le degré d est infini), il faut alors veiller à ce que la dernière condition soit remplie (les autres sont triviales) pour que les théorèmes que nous allons énoncer s'appliquent.

Ainsi, dans tous les cas, on ramène l'étude du noyau $1 - zP(u) = 0$ à l'étude de

$$K(u,z) := u^c - z\phi(u) = 0.$$

Parmi les $e := c + d$ racines (e est donc infini quand d est infini) de cette équation, il y en a c qui tendent vers 0 en 0 (car pour les branches finies en 0, l'équation devient $u(z)^c - z\phi(0) \sim 0$). Nous notons ces « petites branches » $u_1, \ldots, u_c$.

Quand u_1 peut-elle avoir des singularités ? On a une singularité au sens des fonctions analytiques si $z = 0$ (annulation du coefficient de tête) ou bien si

$$K(u,z) = 0 \text{ et } \frac{\partial K}{\partial u}(u,z) = 0,$$

---

[2] On se reportera au chapitre 1 pour l'obtention de telles équations.

[3] Rappelons qu'une excursion sur $\mathbb{Z}$ est une marche allant de 0 à 0, à étapes intermédiaires positives ou négatives ; cela correspond aux « ponts » des probabilistes.

c'est-à-dire si $cu^{c-1} - z\phi'(u) = 0$ en même temps que $u^c - z\phi(u) = 0$. Ce dernier système donne, si $\phi(u) \neq 0$ et $\phi'(u) \neq 0$ (ces deux conditions étant équivalentes quand $z \neq 0$), $z = \frac{cu^{c-1}}{\phi'(u)} = \frac{u^c}{\phi(u)}$ et finalement, on trouve

$$c = \frac{u\phi'(u)}{\phi(u)}.$$

Il est donc primordial de savoir si et quand cette relation est vérifiée, c'est ce à quoi répond la proposition suivante.

Lemme 1 (Unicité du point col $\tau \in \mathbb{R}^+$). *Si ϕ est une fonction admissible, alors, pour tout entier c tel que $1 \leq c < e = \deg(\phi)$, l'équation en u*

$$c = \frac{u\phi'(u)}{\phi(u)} \quad \textit{équivalente à} \quad P'(u) = 0 \quad \textit{avec} \quad P(u) \equiv \frac{\phi(u)}{u^c}$$

admet une unique racine positive τ.

Démonstration. Il serait erroné de croire que deux fonctions convexes n'ont au plus qu'un point d'intersection sur $\mathbb{R}^+$, par exemple $\exp(x) = x^3$ a deux solutions sur $\mathbb{R}^+$. Nous allons ci-dessous donner une preuve du lemme qui ne fait appel qu'à de l'analyse élémentaire ; notons qu'il existe toutefois d'autres approches possibles (*e.g.*, la technique du shifting the mean ou encore exploiter le fait qu'une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions concaves est concave).

On a $P(u) := \frac{\phi(u)}{u^c}$. Ainsi $P'(u) = \frac{\phi'(u)u^c - \phi(u)cu^{c-1}}{u^{2c}}$. Or, pour $\phi(u) \neq 0$, on a les équivalences suivantes

$$P'(u) = 0 \iff \phi'(u)u^c - \phi(u)cu^{c-1} = 0 \iff \frac{u\phi'(u)}{\phi(u)} = c$$

$$\iff u \text{ est un point col de } P$$

Nous allons pour le reste de cette démonstration prendre u réel positif (et on a alors $\phi(u) > 0$). Pour l'indiquer plus clairement au lecteur, nous notons maintenant la variable par x. Nous nous sommes donc ramenés à démontrer l'existence et l'unicité d'une solution à $P'(x) = 0$.

Rappelons que nous notons R le rayon de convergence de ϕ. Si celui-ci est fini, toutes les évaluations en $x = R$ sont à interpréter comme une limite quand $x \to R^-$.

La fonction P est définie et continue sur $]0, R[$. Elle tend vers $+\infty$ en 0 à droite (donc P décroît en 0 à droite) et ainsi P' est négative en 0 à droite (en fait, on a même $P'(0^+) = -\infty$ puisque $\phi(0) > 0$). Si le rayon de convergence R est infini, P tend vers $+\infty$ en R (parce qu'une fonction entière croît plus vite que tout polynôme, ou bien parce que $c < e$ dans le cas où ϕ est polynomial). Si R est fini, alors, puisque ϕ est une fonction admissible, $P'(x) \to +\infty$ quand $x \to R^-$ Ainsi, dans tous les cas, P' est négative en 0 (à droite) et positive en R.

Par ailleurs, en posant $\sum_{n=0}^{e} a_n x^n := \phi(x)$, on a

$$P''(x) = \sum_{n=0}^{e} a_n (n-c)(n-c-1)x^{n-c-2} > 0 \tag{37}$$

car la série est à coefficients positifs (non tous nuls car $e > c \geq 1$). Ainsi, la fonction P' est croissante, négative à droite de 0, et fournit une unique solution à $P'(x) = 0$ sur $]0, R[$. □

Notons aussi que la généralisation du théorème à toutes les séries à coefficients positifs (non nulles en zéro) n'a pas lieu comme le montre le contre-exemple suivant :

$$\phi(x) = \frac{3}{2}x + (1-x)^{3/2}$$

en effet $\frac{x\phi'(x)}{\phi(x)}$ croît de 0 en $x = 0$ à 1 en $x = R = 1$ et ainsi l'équation $c = \frac{x\phi'(x)}{\phi(x)}$ n'a pas de solution pour $c > 1$. En revanche, par exemple, le théorème s'applique bien à $\phi(x) = 1 - (1-x)^{1/2}$.

2.2. Méthode de col. Maintenant que nous venons de déterminer l'unique $\tau > 0$ tel que $P'(\tau) = 0$, précisons qu'il s'agit d'un col simple de $P(u)$ (il est simple car $P''(\tau) > 0$ comme le montre la formule (37) ci-dessus). Le point τ est également un col simple de $\ln P(u), \sqrt{P}(u), \frac{1}{P(u)}, \ldots$, ceci découle de la simple observation des principes de composition des fonctions analytiques[4] : par composition des développements locaux, si τ est un col simple de g et $f'(g(\tau)) \neq 0$, alors τ est col simple de $f \circ g$.

Pour la discussion ultérieure de l'unicité ou non d'une singularité dominante, nous devons introduire une discussion liée à la « périodicité » des marches.

Définition 8 (Périodicité et apériodicité). *Une série h est dite p-périodique s'il existe un entier m et une série S telle que h vérifie*

$$h(z) = z^m S(z^p),$$

p étant le plus grand entier tel que cette propriété soit satisfaite. S'il n'existe pas de $p > 1$ tel que h admette une telle décomposition, alors h est dite apériodique. Pour nos marches, puisque $\phi(0) \neq 0$ (resp. $F(0,0) \neq 0$), la périodicité de ϕ (resp. de F), s'écrit donc $\phi(u) = S(u^p)$ (resp. $F(z,0) = S(z^p)$).

Lemme 2. *La série génératrice F des excursions (les $\mathbb{N}$-excursions comme les $\mathbb{Z}$-excursions) est p/q-périodique (q désigne le pgcd de p et des sauts possibles) si et seulement si ϕ est p-périodique.*

Démonstration. La preuve est facilitée quand on utilise la vision combinatoire de ϕ et de F.

- ϕ périodique implique F périodique. Considérons les degrés des monômes de ϕ. L'ensemble des différences entre ces degrés sont des valeurs multiples de p (la plus petite différence) puisque ϕ est est p-périodique. C'est clairement équivalent à dire que les différences entre les longueurs des différents sauts sont des multiples de p. Soit ℓ la longueur (éventuellement nulle !) du plus petit saut possible (vers la gauche ou vers la droite). Tous les autres sauts sont donc du type $\ell + kp$ (pour un entier k dépendant du saut). Si $\ell = 0$ (*i.e.*, on peut faire des sauts stationnaires), alors F (la fonction qui, rappelons-le, donne le dénombrement des excursions par rapport à leur longueur) est apériodique puisqu'il existe des excursions de toutes longueurs !. On ne perd rien à supposer que $q := \operatorname{pgcd}(\ell, p) = 1$ (sinon, il suffit de considérer la marche associée à

[4]Malgré que j'en aie, nous n'avons donc pas besoin du « lemme technique » de mon mémoire de DEA [**4**] : « Si ϕ est une série à coefficients positifs (non constante et non nulle en 0) alors pour tout $x > 0$ et à l'intérieur du disque de convergence, on a $\phi(x)(x\phi''(x) + \phi'(x)) > x{\phi'}^2(x)$. » Dommage j'aimais bien la preuve... J'ai depuis découvert que cette inégalité avait déjà été démontrée par Ph. Flajolet et A. Odlyzko [**65**], en utilisant ce qu'ils ont baptisé le « déplacement de la moyenne » (shifting the mean).

$\phi(u^{1/q})$, qui a clairement la même série génératrice des excursions que la marche associée à $\phi(u)$). Qu'un chemin soit une excursion implique que les n_g pas vers la gauche et les n_d pas vers la droite se compensent, *i.e.* : $(n_g\ell + k_1p) + (n_d\ell + k_2p) = 0$. Ainsi, en passant modulo p, on obtient $\ell(n_g + n_d) \equiv 0[p]$. Puisque ℓ n'a maintenant plus de facteur premier commun avec p, ceci implique $(n_g+n_d) \equiv 0[p]$, *i.e.* toutes les excursions ont une longueur multiple de p. En conclusion, F est p-périodique.
- Soit ϕ apériodique et supposons F p-périodique. Puisque ϕ est apériodique, alors il existe un saut vers la gauche de longueur s_g et un saut vers la droite de longueur s_d qui ne sont pas dans la même classe d'équivalence modulo p. Ainsi $s_d = -s_g + kp + r$ avec $0 < r < p$. Or s_g sauts consécutifs de longueur s_d suivis de s_d sauts consécutifs de longueur s_g constituent une excursion. Sa longueur est $s_g + s_d = kp + r$, nombre qui n'est pas congru à 0 modulo p, ce qui contredit le fait que F soit p-périodique. On a donc « ϕ apériodique » implique « F apériodique. ». On peut préciser au passage que si s et s' sont deux longueurs de sauts, premières entre elles, alors on a une excursion de longueur n pour tout $n > ss' - s - s'$.

□

Les cas suivants devraient rendre ce lemme limpide.

Exemple 40. *Périodicité et apériodicité de diverses marches*
La marche de Dyck est 2-périodique : le polynôme caractéristique étant $P(u) = u + \frac{1}{u}$, on a ici $\ell = 1$ et $p = 2$, puisque $\mathrm{pgcd}(2, \ell) = 1$, on a $F(z, 0)$ 2-périodique.

La marche de Motzkin est apériodique : le polynôme caractéristique étant $P(u) = u+1+\frac{1}{u}$, on a ici $\ell = 0$ et donc $F(z, 0)$ apériodique.

La marche $\{-2, +2\}$ est 2-périodique : son polynôme caractéristique étant $P(u) = u^2+\frac{1}{u^2}$, on a ici $\ell = 2$ et $p = 4$, puisque $q := \mathrm{pgcd}(p, \ell) = 2$, on a $F(z, 0)$ de la même période que la série génératrice associée à $P(u^{1/q}) = 1/u + u$, qui est en fait de période 2.

La marche $\{-4, +2, +5\}$ (donc $\ell = 2, p = 3, q = 1$) est 3-périodique.

La marche $\{-4, +2, +6\}$ (donc $\ell = 2, p = 2, q = 2$) est de même période que la marche $\{-2, +1, +3\}$ (donc $\ell = 1, p = 1, q = 1$) qui est apériodique. ■

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver le théorème suivant, déjà « connu » dans le contexte probabiliste (en substance depuis Laplace en 1811 !) : il s'agit de manière déguisée d'un théorème local limite pour des sommes de variables aléatoires discrètes. Ce théorème servira de manière essentielle pour aborder l'asymptotique des $\mathbb{N}$-excursions.

Théorème 1 (Asymptotique des $\mathbb{Z}$-excursions). *Pour une marche apériodique, on a un développement asymptotique complet pour le nombre d'excursions sur $\mathbb{Z}$:*

$$f_n(0) \sim \frac{P(\tau)^n}{\sqrt{2\pi h}} n^{-1/2}(1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots),$$

où τ est le point col réel positif de $P(u)$, le polynôme codant les sauts possibles, et où $h = \frac{P''(\tau)}{P(\tau)}$. Plus généralement, le nombre de chemin de 0 à k vérifie

$$f_{n,k} \sim \frac{P(\tau)^n}{\sqrt{2\pi h}} n^{-1/2}(1 + \frac{c_1(k)}{n} + \frac{c_2(k)}{n^2} + \dots).$$

Démonstration. La preuve repose sur une méthode de col appliquée à une grande puissance, en effet

$$f_n(0) = [u^0]P(u)^n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma P(u)^n \frac{du}{u}$$

où γ est le cercle de rayon τ et centré en 0. Notons que ce contour n'entoure bien qu'un seul pôle ($u=0$), puisque

$$P(u)/u = \frac{\phi(u)}{u^{c+1}}\,.$$

Si P est apériodique, alors l'inégalité triangulaire appliquée à ce polynôme (de Laurent) à coefficients positifs, donne que $P(\tau e^{i\theta}) < P(\tau)$ pour $\theta \neq 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$. Ainsi, l'intégrale est entièrement concentrée autour du point col, et un développement local de $\ln P$ autour du col τ (qui est simple) donne (en posant $h = (\ln P)''(\tau)$) :

$$\int_\gamma P(u)^n \frac{du}{u} = \int_\Delta \exp n\left(\ln P(\tau) + \frac{h}{2}(\tau-t)^2 + O((\tau-t)^3\right)\frac{dt}{t}$$

où Δ est un petit segment vertical du plan complexe, centré en τ, de longueur $\log n/\sqrt{n}$

$$= i\frac{P(\tau)^n}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2\pi}{h}} + O(\frac{P(\tau)^n}{n^{3/2}}).$$

On pose désormais $\rho = 1/P(\tau)$, qui est donc le rayon de convergence des Z-excursions. La méthode de col ci-dessus s'appliquant aussi à $[u^k]P(u)^n$, on obtient la même échelle asymptotique en $\rho^{-n}n^{-1/2}$ pour les marches sur $\mathbb{Z}$ allant de 0 à k, seules les constantes $c_1, c_2, \ldots$ dépendent de k. □

Notons au passage que l'on en déduit le curieux résultat suivant :

Corollaire 1. *Les excursions sur $\mathbb{Z}$ peuvent être engendrées par une grammaire algébrique, mais celle-ci ne sera pas fortement connexe*[5].

Démonstration. Le premier point est clair car on peut construire un automate à pile reconnaissant nos objets. Quant au second au point, s'il n'était pas vérifié, on serait dans le cadre du théorème de Drmota–Lalley–Woods et on devrait alors avoir une asymptotique en $\frac{\rho^{-n}}{n^{3/2}}$, ce qui contredirait le théorème 1 ci-dessus. □

Exemple 41. *Dyck bilatères (grands Dyck)*
Les chemins de Dyck bilatères (quelquefois appelés grands Dyck) sont les $\mathbb{Z}$-excursions à pas $(+1,-1)$, ils dénombrent les équilibres lors de tirages à pile ou face. Ils sont engendrés par la grammaire suivante

$$\mathcal{D} = \mathcal{E}^+\mathcal{D} + \mathcal{E}^-\mathcal{D} + \epsilon, \quad \mathcal{E}^+ = a\mathcal{E}^+b\mathcal{E}^+ + \epsilon, \quad \mathcal{E}^- = b\mathcal{E}^-a\mathcal{E}^- + \epsilon$$

où $\mathcal{E}^-$ correspond aux excursions sur $\mathbb{Z}^-$ et $\mathcal{E}^+$ aux excursions sur $\mathbb{Z}^+$. On remarque qu'elle n'est pas fortement connexe et que, conformément au théorème précédent, l'asymptotique de $F(z,0) = \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}z^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}}$ est en $\sqrt{2}\frac{2^n}{\sqrt{\pi n}}$, ainsi, on peut affirmer qu'il n'existe pas de grammaire fortement connexe générant les mots de Dyck bilatères. ■

[5]Une grammaire est fortement connexe si pour toute paire S, S' de non-terminaux distincts, S' figure dans au moins un mot dérivé de S au moyen des règles.

3. Nombre asymptotique d'excursions sur $\mathbb{N}$

L'un des résultats principaux de ce chapitre est ce dénombrement asymptotique des excursions des marches sur $\mathbb{N}$ à sauts bornés.

Théorème 2 (Asymptotique des $\mathbb{N}$-excursions). *Pour une marche apériodique (confer définition page 104), on a un développement asymptotique complet du nombre d'excursions sur* $\mathbb{N}$ *:*

$$f_n(0) = P(\tau)^n n^{-3/2}(c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \dots),$$

où les c_i sont des constantes explicites, e.g. $c_0 = \frac{|A_0|}{p_{-c}\sqrt{\pi P''(\tau)}}$ *avec τ unique zéro réel positif de $P'(u)$ et où $A_0 = \prod_{i=2}^{c} u_i(\frac{1}{P(\tau)})$.*

Démonstration. À chaque excursion sur $\mathbb{Z}$, on peut associer une excursion sur $\mathbb{N}$: il suffit de couper l'excursion au point le plus bas de sa trajectoire (prenons le plus à gauche si ce minimum est atteint plusieurs fois), appelons w_1 ce qui se trouve à gauche et w_2 ce qui se trouve à droite alors $w_2 \cdot w_1$ est en effet une excursion sur $\mathbb{N}$. C'est une généralisation du principe de conjugaison de Raney (qui correspond au cas $c = 1$) ou du lemme cyclique de Dvoretsky–Motzkin.

Ainsi, l'ensemble de tous les conjugués des $\mathbb{N}$-excursions de longueur n contient toutes les $\mathbb{Z}$-excursions de longueur n, d'où les inégalités

$$f_n^{\mathbb{N}}(0) \leq f_n^{\mathbb{Z}}(0) \leq n f_n^{\mathbb{N}}(0)$$

et donc

$$\frac{1}{n} f_n^{\mathbb{Z}}(0) \leq f_n^{\mathbb{N}}(0) \leq f_n^{\mathbb{Z}}(0).$$

Ainsi, $f_n^{\mathbb{N}}(0)$ est du même ordre asymptotique que $f_n^{\mathbb{Z}}(0)$, à savoir $P(\tau)^n$ (c'est-à-dire que les deux séries génératrices $F_{\mathbb{Z}}(z, 0)$ et $F_{\mathbb{N}}(z, 0)$ ont le même rayon de convergence, à savoir $\rho = \frac{1}{P(\tau)}$). En faisant un peu d'analyse de singularités et en exploitant la forme close donnée par la méthode du noyau, nous allons montrer non seulement ce comportement en racine carrée mais aussi que l'on peut expliciter la constante A dans le comportement asymptotique $f_n(0) \sim A\rho^{-n} n^{-3/2}$ et en fait, avoir un développement asymptotique explicite complet.

La méthode du noyau (théorème (1), p. 27) donne la forme

$$[z^n]F(z, 0) = [t^{cn}]F(t^c, 0) = [t^{cn}]\frac{(-1)^{c+1}}{p_{-c}t^c} \prod_{i=1}^{c} u_i(t^c) = [t^{nc}]\frac{(-1)^{c+1}}{p_{-c}t^c} U_1(t).U_2(t) \cdots U_c(t)$$

où on a posé $U_i(t) := u_i(t^c)$. Rappelons que nous notons $u_1(z)$ l'unique branche finie et réelle positive sur $\mathbb{R}^+$, du moins dans un petit voisinage de $z = 0$, de l'équation $1 - zP(u) = 0$. Puisque $u_i^c = z\phi(u_i)$, on a donc, en prenant w une racine c-ième primitive de l'unité,

$$U_i = w^{i-1} t \phi^{1/c}(U_i).$$

Cette nouvelle équation définit bien une unique fonction série formelle de $\mathbb{C}[[t]][[u]]$ U_i, car la fonction $U \mapsto t\phi^{1/c}(U)$ est contractante et admet donc un unique point fixe. Les U_i sont des fonctions analytiques en 0. L'étude asymptotique directe des coefficients de U_i à partir de l'égalité précédente n'est *a priori* pas aisée car $\phi^{1/c}$ n'est plus forcément à coefficients positifs (par exemple $\phi = 1 + u + u^2 + u^3$ conduit à $\phi^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + \frac{5}{16}u^3 - \frac{29}{128}u^4 + O(u^5)$).

Ensuite, il faudra déduire du comportement des coefficients de U_1, le comportement de

$$[z^n]F(z) = [t^{nc}]F(t^c) = [t^{nc}]\frac{1}{p_{-c}t^c}U_1(t)U_1(wt)\dots U_1(w^{c-1}t)\,;$$

le piège est bien sûr qu'il peut y avoir (et en fait, il y a !) plein de simplifications de singularités dans le produit.

Tout d'abord, nous allons montrer que le couple (ρ, τ) correspond à un point de croisement singulier, de type racine carrée, des branches $u_1(z)$ (la branche réelle positive convergente en $z = 0^+$) et $v_1(z)$ (la branche réelle positive divergente en $z = 0^+$). En effet, suivons la branche u_1 le long de $\mathbb{R}^+$: elle est continue et ne s'annule pas (car sinon on aurait $1 - zP(u_1) = 0$ avec $u_1 = 0$, donc $p_{-c} = 0$), de plus elle ne peut rester réelle jusqu'en $+\infty$ car sinon $1 - (+\infty) \times P(u_1) = 0$ impliquerait $P(u_1(+\infty)) = 0$, ce qui serait impossible, P étant alors une somme de quantités strictement positives (car les coefficients sont positifs et que nous venons de montrer que u_1 aussi). Ainsi $u_1(z)$ a une singularité pour $z \in \mathbb{R}^+$ (un endroit où la branche « devient » complexe) ; appelons-la ρ' et posons $\tau' := u_1(\rho')$, puisque τ est réel positif, le lemme d'unicité (1, p. 103) montre que l'on a nécessairement $(\rho', \tau') = (\rho, \tau)$ (et notamment que u_1 n'a pas d'autre singularité sur $[0, \rho]$). Le même raisonnement peut être fait avec la branche v_1 ; ainsi, le point singulier (ρ, τ) est le point de croisement de ces deux branches.

Montrons maintenant que cette singularité est du type racine carrée, c'est-à-dire qu'on a un développement en série de Puiseux du type suivant :

$$u_1 - \tau = d_1(\rho - z)^{1/2} + d_2(\rho - z) + d_3(\rho - z)^{3/2} + d_4(\rho - z)^2 + \cdots .$$

Posons

$$H(u) := \frac{\tau^c}{\phi(\tau)} - \frac{u^c}{\phi(u)} = \frac{1}{P(\tau)} - \frac{1}{P(u)}.$$

Si l'on développe H en série de Taylor au point $u = \tau$, on obtient :

$$H(u) = H(\tau) + \frac{1}{1!}H'(\tau)(u-\tau) + \frac{1}{2!}H''(\tau)(u-\tau)^2 + \frac{1}{3!}H'''(\tau)(u-\tau)^3 + \cdots$$

Or on a $H(\tau) = 0$ et $H'(\tau) = 0$. On a aussi $H''(\tau) \neq 0$, puisque τ est un point col simple. Ainsi

$$H(u) = \frac{1}{2!}H''(\tau)(u-\tau)^2 + \frac{1}{3!}H'''(\tau)(u-\tau)^3 + \cdots$$

d'où l'on tire (en prenant les racines carrées) et puisque $H(u_1(z)) = \rho - z$ et en pour un z tel que $u_1(z) \sim \tau$ (*i.e.* avec $z \sim \rho$) :

$$\pm\sqrt{\rho - z} = \sqrt{\frac{H''(\tau)}{2}}\,(u_1 - \tau)\,\sqrt{1 + \alpha_1(u_1 - \tau) + \alpha_2(u_1-\tau)^2 + \cdots}.$$

En fait il faut prendre la détermination $-\sqrt{\rho - z}$ car $u_1(z)$ croît quand $z \to \rho^-$ (cela se voit par étude des deux points d'intersections des courbes u^c et $z\phi(u)$ pour u réel positif et plus petit que τ). Après quelques manipulations triviales (et valides car $H''(\tau) \neq 0$ et car le radical de la somme infinie est non nul puisqu'équivalent à $(1 + o(u))^{-1/2}$ pour u au voisinage de τ), on obtient :

$$u_1(z) - \tau = -\sqrt{\frac{2}{H''(\tau)}}\,\sqrt{\rho - z}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_1(u-\tau) + \alpha_2(u-\tau)^2 + \cdots}}.$$

$= -\sqrt{\frac{2}{H''(\tau)}}\sqrt{\rho - z}\ \left(1 + \beta_1(\rho - z) + \beta_2(\rho - z)^2 + \cdots\right)$ qui se récrit, en faisant ressortir les coefficients, en :

$$u_1(z) - \tau = d_1(\rho - z)^{1/2} + d_2(\rho - z) + d_3(\rho - z)^{3/2} + d_4(\rho - z)^2 + \cdots$$

avec des constantes d_i explicitables, notamment

$$d_1 := -\sqrt{\frac{2}{H''(\tau)}} = -P(\tau)\sqrt{\frac{2}{P''(\tau)}}\,. \tag{38}$$

Je souhaite maintenant montrer que les autres branches $u_2, \ldots, u_c$ (notées ci-dessous u_i) sont régulières pour $z \leq \rho$. Pour $z \to 0^+$, toutes les petites branches u_i sont strictement en-dessous de u_1, en effet, cela découle de l'apériodicité de P :

$$P(u_1) = \frac{1}{z} = |P(u_i)| < P(|u_i|) \tag{39}$$

d'où on conclut que $u_1 > |u_i|$ car P est strictement décroissant sur $]0, \tau[$ et que $|u_i| < \tau$ pour $z \in 0^+$. De même, pour $z \in 0^+$, toutes les branches divergentes $v_2, \ldots, v_d$ sont strictement au-dessus de la branche divergente v_1, puisque P est croissant sur $]\tau, +\infty]$.

Cette propriété de domination, $|u_i| < u_1 < v_1 < |v_i|$ a lieu pour tout $z \in]0, \rho[$ (et même pour $|z| < \rho$ puisque que l'on peut prendre $z = |z|$ dans la relation (39)), ρ étant le premier instant, *i.e.* le plus petit $z \in R^+$, où des branches (en fait u_1 et v_1) atteignent le point τ, qui est justement le point où P n'est plus strictement décroissante. Cette domination implique notamment que le seul moment où des u_i et des v_i peuvent se croiser, c'est quand $z \geq \rho$. En fait, même le cas $z = \rho$ est exclu, car sinon on aurait $|u_i(\rho)| = u_1(\rho) = \tau = |v_i(\rho)|$, ce qui contredirait l'apériodicité de P : $\frac{1}{\rho} = |P(u_i)| < P(|u_i|) = P(u_1) = P(\tau) = \frac{1}{\rho}$.

Reste une question, que se passe-t-il si plusieurs petites branches se croisent entre elles ? Peuvent-elles produire une singularité ? Puisque nous avons montré que la singularité dominante est en $\frac{1}{P(\tau)}$, nous sav(i)ons déjà que leur produit se simplifiera s'il y a des croisements pour $z < \rho$, mais peut-être peuvent-elles se croiser entre elles en $z = \rho$! Or elles sont conjuguées, donc leur produit sera régulier (analytique).

En conclusion, par exemple pour le premier ordre asymptotique, on a

$$f_n(0) = [z^n]F(z, 0) = [t^{cn}]F(t^c, 0) = [z^n]\frac{(-1)^{c+1}}{p_{-c}z}\prod_{i=1}^{c} u_i(z) = [z^n]\frac{(-1)^{c+1}}{p_{-c}z}u_1(z)\prod_{i=2}^{c} u_i(z)$$

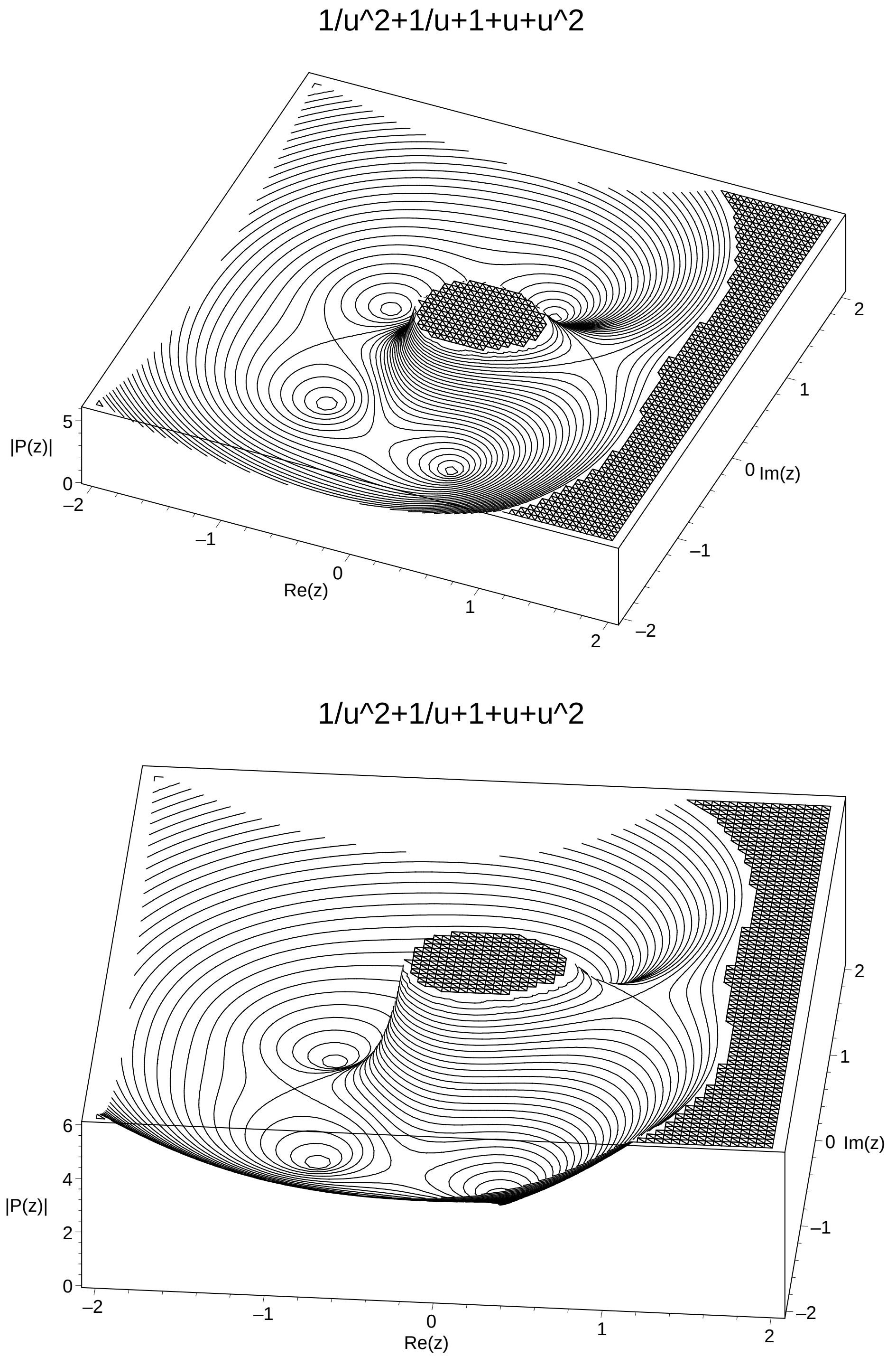
$$\sim [z^n]\frac{(-1)^{c+1}}{p_{-c}z}\left(\tau - d_1\sqrt{\rho - z}\right)\prod_{i=2}^{c} u_i(\rho)\,,$$

d'où le résultat annoncé. □

Ce théorème est le résultat clef de cette thèse, non seulement il utilise les informations « algébriques » fournies par le chapitre 1, mais les propriétés analytiques des singularités dégagées ici conditionnent l'étude des autres paramètres des marches à sauts bornés. De plus, les ℕ-excursions étant engendrées par une grammaire fortement connexe, le théorème de Drmota–Lalley–Woods implique que la série génératrice présente une singularité en racine carrée, et donc, le comportement en $O(\rho^{-n}n^{-3/2})$ est attendu mais ni ρ ni les constantes en jeu ne sont accessibles simplement, contrairement à ce que fournit la méthode du noyau.

Notons par ailleurs que les théorèmes 1, 2, 3 restent valides pour toutes les marches $P(u) = \frac{\phi(u)}{u^c}$ avec ϕ admissible au sens de la définition 7, p. 102.

Remarque : après vérification numérique, notamment sur tous les polynômes de Laurent apériodiques de degré d $(1 \leq d \leq 8)$, de valuation c $(-8 \leq -c \leq -1)$ et à coefficients $\in \{0, 1, 2, \}$ (temps de calcul CPU : un mois sur un PII400) et sur bien d'autres instances aléatoires, je suis convaincu du fait que pour toute marche à sauts bornés, il n'y a pas de croisement entre les branches (petites ou grandes) en un ρ' réel (avec $\rho' < \rho$), autrement dit, quand on regarde le paysage complexe d'un polynôme de Laurent apériodique et à coefficients positifs, son point col, τ', le plus haut *et ayant une valeur réelle positive*, (*i.e.*, $P(\tau') \in \mathbb{R}^+$) est toujours réel positif (*i.e.* $\tau' \in \mathbb{R}^+$). Le théorème précédent montre de toute façon, que s'il y a un croisement ($\approx$ un point col>0 plus haut), alors le produit des branches qui se croisent reste analytique.



Deux vues d'un même paysage complexe, celui associé à la marche $\{-2,-1,0,1,2\}$. Le point col positif le plus haut est bien sur la demi-droite $\mathbb{R}^+$. C'était l'une des clefs de ce chapitre que d'étudier ces points cols réels de polynôme de Laurent à coefficients positifs.

4. Nombre asymptotique de chemins sur $\mathbb{N}$

Pour les chemins, l'asymptotique va dépendre d'un paramètre, que nous appellerons la *dérive* et qui code le fait qu'à une position donnée, la marche ait plus de possibilités de « monter » ou de « descendre ».

La dérive de la marche est définie comme $P'(1)$, la somme des sauts possibles. En termes probabilistes, si $P(u)$ a été normalisé par $P(1) = 1$ alors $P'(1)$ est précisément l'espérance du déplacement en une étape. Notons que, puisque $P'(u)$ n'a qu'un seul zéro sur $\mathbb{R}^+$, on a une une dérive nulle si et seulement si $\tau = 1$ (et alors $\rho = \frac{1}{P(\tau)} = \frac{1}{P(1)}$). Par ailleurs, puisque $P'(1)$ est la pente de la tangente à $P(u)$ en $u = 1$, $P'(1) > 0 \iff \tau < 1$ et $P'(1) < 0 \iff \tau > 1$. Notons que les marches de Dyck et de Motzkin sont des marches à dérive nulle. Remarquons en outre que $P(1) \geq P(\tau)$ implique que $\rho \leq \frac{1}{P(1)}$.

Théorème 3 (Asymptotique des $\mathbb{N}$-chemins). *Pour une marche à sauts bornés apériodique, le développement asymptotique complet du nombre de chemins sur $\mathbb{N}$ est*

$$f_n(1) \sim \alpha(1)\frac{P(1)^n}{\sqrt{\pi P''(\tau)}n^{1/2}}(1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots) \quad \textit{quand la dérive est nulle,}$$

$$f_n(1) \sim \frac{P^2(\tau)\,\alpha(\tau)}{P(\tau) - P(1)}\frac{P(\tau)^n}{\sqrt{\pi P''(\tau)}n^{3/2}}(1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots) \quad \textit{quand la dérive est négative,}$$

$$f_n(1) \sim (1-\tau_1)\,\alpha(1)P(1)^n + \frac{P^2(\tau)\,\alpha(\tau)}{P(\tau) - P(1)}\frac{P(\tau)^n}{\sqrt{\pi P''(\tau)}n^{3/2}}(1+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\dots) \quad \textit{quand la dérive est}$$

positive. Les constantes sont toutes calculables (τ est le point col réel de $P(u)$, $\rho = \frac{1}{P(\tau)}$), les autres notations sont données dans la preuve.

Démonstration. Nous allons exploiter les résultats du théorème précédent (qui nous a rendu limpide le comportement des petites branches) sur

$$F(z,1) = \frac{1}{1 - zP(1)}\prod_{i=1}^{c}(1 - u_i(z))\,.$$

Si la dérive est nulle, on a $\tau = 1$ et $\rho = \frac{1}{P(1)}$, par conséquent

$$\begin{aligned} F(z,1) &\sim \frac{1 - u_1(z)}{1 - zP(1)}\prod_{i=2}^{c}(1 - u_i(\frac{1}{P(1)})) \\ &\sim \frac{1 - (\tau - d_1\sqrt{\rho - z})}{1 - zP(1)}\,\alpha(1) = d_1\rho\frac{\sqrt{\rho - z}}{\rho - z}\,\alpha(1)\,, \end{aligned}$$

où d_1 est donné par l'équation 38 page 109 et où l'on a posé

$$\alpha(x) := \prod_{i=2}^{c}(1 - u_i(\frac{1}{P(x)}))\,. \tag{40}$$

On obtient le résultat de l'énoncé car

$$[z^n](\rho - z)^{-1/2} = \frac{\rho^{-n}}{\sqrt{2\pi}n^{1/2}}(1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots)\,.$$

Si la dérive est négative, on a $\tau > 1$ et $\rho > \frac{1}{P(1)}$ (où ρ est le « rayon de convergence » de u_1), par conséquent $u_1(z) = 1$ pour $z = \frac{1}{P(1)}$ (à cause de la propriété de domination, les autres u_i ne valent pas 1 sur $[0, \frac{1}{P(1)}]$), et donc $\frac{1-u_1(z)}{1-zP(1)}$ est régulier en $z = 1$ et $F(z, 1)$ a sa singularité dominante en $z = \rho$, et on a :

$$F(z,1) \sim \frac{1}{1-\rho P(1)} \left(1 - (\tau - d_1\sqrt{\rho - z})\right) \alpha(\tau) \sim -\sqrt{\rho - z}\frac{d_1 P(\tau)}{P(1) - P(\tau)}\, \alpha(\tau)\,,$$

Or

$$[z^n](\rho - z)^{1/2} = -\frac{\rho^{-n}}{\sqrt{2\pi}n^{3/2}}\,,$$

d'où

$$f_n(1) \sim \frac{d_1 P(\tau)\,\alpha(\tau)}{P(\tau) - P(1)} \frac{\rho^{-n}}{\sqrt{2\pi}n^{3/2}} \left(1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots\right)\,.$$

Si la dérive est positive, on a $\tau < 1$ et $\rho > \frac{1}{P(1)}$ (où ρ est le « rayon de convergence » de u_1), ainsi la singularité dominante est en $z = \frac{1}{P(1)}$, où le produit (pour $i = 1, \dots, c$) des $(1 - u_i(z))$ est régulier, ce produit ne devenant singulier qu'en $z = \rho$ (à cause de $1 - u_1(z)$), par conséquent, en notant $\tau_1 := u_1(\frac{1}{P(1)})$,

$$F(z,1) \sim \frac{1}{1 - zP(1)} (1 - \tau_1)\, \alpha(1)\,,$$

d'où

$$f_n(1) \sim (1 - \tau_1)\,\alpha(1)P(1)^n + \frac{1}{1 - \rho P(1)}\,\alpha(\tau) d_1 [z^n]\sqrt{\rho - z}\,,$$

$$\sim (1 - \tau_1)\,\alpha(1)P(1)^n - \frac{d_1 P(\tau)\,\alpha(\tau)}{P(\tau) - P(1)} \frac{\rho^{-n}}{\sqrt{2\pi}n^{3/2}} \left(1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots\right)\,.$$

Notons que, dans les trois cas, les constantes en jeu s'expriment à partir des valeurs des u_i en $z = \rho$ (resp. $z = \frac{1}{P(1)}$), qui ne sont rien d'autre que les c racines de module $\leq \tau$ de $P(u) = P(\tau)$ (resp. $P(u) = P(1)$). □

Corollaire 2. *Les chemins sur $\mathbb{N}$ ne peuvent être engendrés par une grammaire algébrique, mais celle-ci ne sera pas fortement connexe (*i.e. *tous les terminaux ne sont pas reliés entre eux).*

Démonstration. Le premier point est clair car on peut construire un automate à pile reconnaissant nos objets. Quant au second au point, s'il n'était pas vérifié, on serait dans le cadre du théorème de Drmota–Lalley–Woods et on devrait alors avoir une asymptotique en $\frac{\rho^{-n}}{n^{3/2}}$, ce qui contredirait le théorème précédent pour les marches dont la dérive est ≥ 0. Il en est de même pour les marches de dérive < 0, puisque si les chemins étaient engendrés par une grammaire connexe, il suffirait de changer le poids des lettres pour avoir une dérive positive (ceci n'affecte pas la connexité de la grammaire !) et on aurait dans ce cas aussi une contradiction avec le théorème ci-dessus. □

Ceci montre que la réciproque du théorème de Drmota–Lalley–Woods est fausse, *i.e.* on n'a pas équivalence entre objets combinatoires algébriques dont la série génératrice présente une singularité de type racine carrée et objets combinatoires engendrés par une grammaire connexe.

5. Loi limite du nombre d'effleurements

5.1. Retours à l'origine des excursions.

Théorème 4 (Nombre de retours en zéro). *Le nombre de retours en zéro d'une marche sur $\mathbb{N}$ à sauts bornés est* $1+$ *la somme de deux lois géométriques. Notons $E(z)$ la série génératrice des excursions et ρ le rayon de convergence de celle-ci et soit $b_0 = E(\rho)$ sa valeur en la singularité. La moyenne est* $2b_0-1+O\left(\frac{1}{n}\right)$ *retours à zéro, avec une variance* $2b_0(b_0-1)+O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Démonstration. Puisqu'une excursion est une suite d'arches, on a $E(z) = \frac{1}{1-A(z)}$ et donc $A(z) = 1 - \frac{1}{E(z)}$ pour $E(z)$ et $A(z)$ séries génératrices des excursions et des arches respectivement.

$$F(z,0,t) = \sum_{n,k} f_{nk} z^n t^k = \frac{1}{1-tA} = \frac{1}{1-t\big(1-\frac{1}{E}\big)}$$

Dès lors, tous les moments sont parfaitement explicitables car les dérivées m-ième en t de $F(z,0,t)$ sont calculables (elles valent $m!\frac{(1-E^{-1})^m}{(1-t(1-E^{-1}))^{m+1}}$) et se simplifient quand $t=1$: $\partial_t^m F(z,0,1) = m!E(z)(E(z)-1)^m$.

Ainsi, le nombre moyen d'effleurements est

$$\mu_n = \frac{[z^n]\partial_t F(z,0,1)}{[z^n]F(z,0,1)} = \frac{[z^n]E(z)^2}{[z^n]E(z)} - 1 = 2b_0 - 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

car $E(z) = b_0 - b_1\sqrt{\rho - z} + \cdots$ et la variance est donnée par

$$\sigma_n^2 = \frac{f_n''(1)}{f_n(1)} + \mu_n - \mu_n^2 = \frac{[z^n]2E(z) - 4E(z)^2 + 2E(z)^3}{[z^n]E(z)} + \mu_n - \mu_n^2$$

$$= 6b_0^2 - 8b_0 + 2 + \mu_n - \mu_n^2 = 2b_0(b_0-1) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le nombre de marches de longueur n ayant j effleurements est donné par

$$f_{nk} = [z^n]\left(1 - \frac{1}{E(z)}\right)^j = [z^n]\frac{1}{b_0} - \frac{jb_1(1-b_0^{-1})^{j-1}\sqrt{r-z}}{b_0^2} + O(r-z).$$

Ainsi, la probabilité d'avoir asymptotiquement j effleurements vaut $p_j = f_{nj}/f_n \to \frac{j(1-b_0^{-1})^{j-1}}{b_0^2}$ quand $n \to +\infty$, et $\sum_{j\geq 0} p_j = 1$ quel que soit b_0. La série génératrice de probabilités étant valant $x^2(\frac{1}{b_0}\frac{1}{x}\frac{1}{1-x})^2$. On a ainsi une loi limite discrète qui est somme de $1+$ deux lois géométriques de paramètre $1/b_0$. □

Exemple 42. *Degré moyen à la racine des arbres généraux*
Les arbres généraux sont les arbres planaires dont chaque nœud interne peut avoir autant de fils que l'on veut ; ils vérifient donc l'équation combinatoire $\mathcal{G} = \mathcal{N} \times Seq(\mathcal{G})$, *i.e.* $G(z) = z\frac{1}{1-G(z)}$.

En particulier, la racine d'un tel arbre peut donc avoir 36, 3 milliards, 10^{70} fils, il y a le choix ! Nous allons montrer (c'est un résultat du folklore) qu'en moyenne la racine a 3 fils, un degré fort petit donc par rapport à tout ce qui était autorisé !

Ce degré, à cause de la correspondance de Łukasiewiecz est équivalent aux nombres de retours en zéro de la marche de Dyck (pas $\{+1,-1\}$), puisque $F(z,0) = 2 - 4\sqrt{1/2 - z} + \ldots$, on a ainsi $\mu_n = 3 - \frac{12}{n} + \frac{48}{n^2} + O(\frac{1}{n^3})$.

Remarquons que pour les mots de Dyck, le résultat peut être établi sans recours à l'analyse de singularité : en effet, le nombre d'excursions de longueur n est

$$E_n := [z^n]F(z,0,1) = [z^n]\frac{1-\sqrt{1-4z^2}}{2z^2}$$

et le nombre moyen d'effleurements pour une excursion de longueur $2k$ est donc :

$$\mu_{2k} = \frac{[z^{2k}]\partial_t F(z,0,1)}{[z^{2k}]F(z,0,1)} = \frac{[z^{2k}]E(E-1)}{E_{2k}} = \frac{\frac{\binom{2(k+1)}{k+1}}{k+2} - \frac{\binom{2k}{k}}{k+1}}{\frac{\binom{2k}{k}}{k+1}}$$

$$= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+2)}{(k+2)(k+1)^2} - 1 = 3\frac{k}{k+2} = 3\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p 2^p}{k^p} = 3 - \frac{6}{k} + \frac{24}{k^2} + O(\frac{1}{k^3})\,.$$

Ce résultat me permettait de conclure mon mémoire de DEA par cet apophtegme mémorable : « L'ivrogne frappe toujours trois fois. » ∎

Exemple 43. *Le paradoxe des facteurs*
Considérons un mot de Dyck (généralisé), son nombre moyen de facteurs (ici, au sens de facteur « premiers », i.e. la factorisation de l'excursion en arches) est essentiellement *indépendant de sa longueur*! Cela peut paraître paradoxal : en effet, un mot de Dyck (généralisé) étant une suite d'arches, j'en construis un en rajoutant une arche, ce qui devrait donc augmenter le nombre de facteurs.

Le paradoxe est bien sûr levé quand on songe que les chemins de Dyck (généralisés) ont plutôt tendance à « monter en hauteur » qu'à stagner sur l'axe des abscisses, *même si la dérive est négative*. En effet, le fait de considérer des excursions fait que toutes les marches, quelques soient leur dérive, sont ici « conditionnées » à revenir en zéro ; ainsi, tout le monde est logé à la même enseigne et a un nombre constant de facteurs en moyenne.

C'est ainsi qu'un mot de Dyck a en moyenne une factorisation ()()(), plus précisément, puisque $p_j = \frac{j}{2^{j+1}}$, on a un seul facteur dans 25% des cas, deux facteurs dans 25% des cas, trois facteurs dans ≈ 24% des cas, quatre facteurs dans ≈ 12% des cas, etc. La masse des mots ayant encore plus de facteurs étant assez diffuse, la moyenne se fait à 3 facteurs. ∎

5.2. Retours à l'origine des chemins.

Théorème 5 (Asymptotique des retours en 0 des $\mathbb{N}$-chemins). *Pour une marche à sauts bornés apériodique, le nombre de retours en 0 des chemins sur* $\mathbb{N}$ *suit une loi géométrique de paramètre* $\frac{1}{\tau}$ *quand la dérive est négative ou nulle (*i.e $\tau > 1$*) et de paramètre* $\frac{1}{|a|}$ *quand la dérive est positive (*a *est le produit des* c *racines de modules* $< \tau$ *de* $P(u) = P(1)$*, multiplié par* $P(1)/p_{-c}$*).*

Démonstration. Le nombre d'effleurements est le nombre de retours en 0. À la section 4.4 du chapitre 1, nous avons montré que la série génératrice des effleurements vérifiait, pour une marche sur $\mathbb{N}$:

$$F(z,u,t) = \frac{1}{1-t(1-1/F(z,0))}\frac{F(z,u)}{F(z,0)}.$$

Le nombre de chemin de longueur n ayant j effleurements est alors donné par

$$f_{nj}(1) = (1-1/F(z,0))^j\frac{F(z,1)}{F(z,0)}\,.$$

Or
$$\frac{(1-1/F(z,0))^j}{F(z,0)} \sim \frac{(1-\frac{1}{\tau})^j}{\tau} + \left(-\frac{j}{\tau} + (1-\frac{1}{\tau})\right)\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{j-1} \frac{d_1}{\tau^2}\sqrt{\rho - z} + \dots$$
En multipliant par le comportement de $F(z,1)$, il nous faut encore distinguer les cas suivants. Quand la dérive est nulle, on obtient ainsi
$$f_{nj}(1) \sim [z^n] \frac{\rho d_1 \alpha(1)(1-\frac{1}{\tau})^j}{\tau} (\rho - z)^{-1/2} \sim \frac{\rho d_1 \alpha(1)(1-\frac{1}{\tau})^j}{\tau} \frac{\rho^{-n}}{\sqrt{2\pi} n^{1/2}}.$$
Quand la dérive est négative, on obtient ainsi
$$f_{nj}(1) \sim \frac{\rho d_1 \alpha(1)(1-\frac{1}{\tau})^j}{\tau(P(1)-P(\tau))} [z^n] - (\rho - z)^{-1/2} \sim \frac{\rho d_1 \alpha(1)(1-\frac{1}{\tau})^j}{\tau(P(1)-P(\tau))} \frac{\rho^{-n}}{\sqrt{2\pi} n^{3/2}}.$$
Quand la dérive est positive, en posant $a = F(P(1)^{-1}, 0)$ on obtient ainsi
$$f_{nj}(1) \sim \frac{(1-\frac{1}{a})^j}{a} \alpha(1)(1-\tau_1)P(1)^n.$$

Ainsi, on a $f_{nj}(1)/f_n(1) \to \frac{1}{\tau}(1-\frac{1}{\tau})^j$ quand $n \to +\infty$ pour une dérive ≥ 0 et $f_{nj}(1)/f_n(1) \to \frac{1}{a}(1-\frac{1}{a})^j$ dans le dernier cas (dérive < 0). L'asymptotique des moments est aisément calculable à partir de
$$\partial_t F(z,u,1) = F(z,u)(F(z,0)-1) \text{ et } \partial_t^2 F(z,u,1) = 2(F(z,0)-1)^2 F(z,u).$$
La moyenne et la variance sont bien sûr en $O(1)$. □

Notons que le fait que les chemins de dérive négative aient en moyenne un nombre constant d'effleurements peut paraître contre-intuitif (puisque la marche ne devrait pas arrêter de se cogner contre l'axe des abscisses) mais que cela s'explique par le fait que l'on conditionne par un évènement exponentiellement rare : le rapport marches sur $\mathbb{Z}$ /chemins sur $\mathbb{N}$ étant $f_n(1)/P(1)^n \approx (\frac{P(\tau)}{P(1)})^n = (1-\epsilon)^n$.

Exemple 44. *Effleurements des mots de Dyck*
Pour $P(u) = u + \frac{1}{u}$, on a :
$$F(z,u,t)(u - z(1+u^2)) = u + zu(t-1)F'(z,0,t) - zuu^{-1}[u^{-1}]\sum_n P z^n f_n$$
$$F(z,u,t)(u - z(1+u^2)) = u + zu(t-1)F'(z,0,t) - z[u^0]\sum_n z^n f_n.$$
$$F(z,u,t)(u - z(1+u^2)) = u + zu(t-1)F'(z,0,t) - zF(z,0,t) \tag{41}$$
en annulant le noyau, on obtient, en fonction de la racine $u_1(z)$ du noyau,
$$zF(z,0,t) = u_1 + zu_1(t-1)F'(z,0,t)$$
en dérivant l'équation (41) par rapport à u, puis avec $u=0$, on a aussi
$$F'(z,0,t) = \frac{F(z,0,t)-1}{zt}$$
d'où
$$F(z,0,t) = \frac{u_1}{(1-t)u_1 + zt}$$

et ainsi on a

$$F(z,u,t) = \frac{u^2(1-t)(u_1-z)+zu_1}{((1-t)u_1+zt)(zu^2-u+z)}$$

■

6. Altitude finale

Pour les excursions, l'altitude du dernier point est bien sûr toujours 0. Pour les chemins, nous allons montrer les faits suivants

Théorème 6 (Altitude moyenne des $\mathbb{N}$-chemins). *Pour une marche à sauts bornés apériodique, l'altitude moyenne finale d'un chemin sur $\mathbb{N}$ vérifie*

- *une loi de Rayleigh ($\mu_n = O(\sqrt{n})$ et $\sigma_n^2 = O(n)$) quand la dérive est nulle,*
- *une loi de type « somme de géométriques » ($\mu_n = O(1)$ et $\sigma_n^2 = O(1)$) quand la dérive est négative,*
- *une loi gaussienne ($\mu_n = O(n)$ et $\sigma_n^2 = O(n^2)$) quand la dérive est positive.*

DÉMONSTRATION. Je renvoie temporairement à [**8**].

□

On trouvera dans le tableau de la page suivante des développements asymptotiques de différents paramètres sur quelques marches classiques.

Périodique, dérive nulle (marche de Dyck) :

$[+1,-1]$	n	énumération	effleurements (μ,σ^2)	altitude finale (μ,σ^2)
$F(z,0)$	pair	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{n^{3/2}}$	$3-\frac{12}{n}, 10-\frac{120}{n}$	0
	pair	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{\sqrt{n}}-\frac{2^n}{\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$	$1-\frac{3}{n}, 2-\frac{20}{n}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\sqrt{n}-1+\frac{\sqrt{1\pi}}{4}n^{-1/2}, 2n-\frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\sqrt{n}+\frac{7}{2}$
$F(z,1)$	impair	$\frac{\sqrt{2}2^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}-\frac{32^n}{2\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$	$1-\frac{4}{n}, 2-\frac{24}{n}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\sqrt{n}-1+\frac{\sqrt{3\pi}}{8}n^{-1/2}, 2n-\frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\sqrt{n}+4$

Périodique, dérive $\neq 0$ (Marche de Dyck avec 2 pas arrière) :

$[+1,-1,-1]$	n	énumération	effleurements (μ,σ^2)	altitude finale (μ,σ^2)
$F(z,0)$	pair	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{(2\sqrt{2})^n}{n^{3/2}}+O(\frac{2^n}{n^{5/2}})$	$3-\frac{12}{n}+O(\frac{1}{n^2}), 4-\frac{60}{n}+O(\frac{1}{n^2})$	0
	pair	$\frac{1}{2}3^n+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{\sqrt{n}}-\frac{2^n}{\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$	$1-\frac{3}{n}+O(\frac{1}{n^2}), 2-\frac{17}{n}+O(\frac{1}{n^2})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\sqrt{n}-1+\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}n^{-1/2}+O(n^{-3/2}), (2-\frac{\pi}{2})n+\frac{3-\pi}{2}\pi-\frac{\pi-4}{32}\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})$
$F(z,1)$	impair	$\frac{1}{2}3^n+\frac{\sqrt{2}2^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}-\frac{3}{2\sqrt{2\pi}}\frac{2^n}{n^{3/2}}$	$1-\frac{4}{n}+O(\frac{1}{n^2}), 2-\frac{20}{n}+O(\frac{1}{n^2})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\sqrt{n}-1+\frac{\sqrt{3\pi}}{4\sqrt{2}}n^{-1/2}+O(n^{-3/2}), (2-\frac{\pi}{2})n+2-\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{16}\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})$

Apériodique, dérive nulle (marche de Motzkin), $\rho = 1/3$:

$[+1,0,-1]$	énumération	effleurements (μ,σ^2)	altitude finale (μ,σ^2)
$F(z,0)$	$\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}\frac{3^n}{n^{3/2}}-\frac{117\sqrt{3}}{32\sqrt{\pi}}\frac{3^n}{n^{5/2}}$	$5-\frac{45}{2n}, 12-\frac{387}{2n}$	0
$F(z,1)$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\frac{3^n}{\sqrt{n}}-\frac{9\sqrt{3}}{16\sqrt{\pi}}\frac{3^n}{n^{3/2}}$	$2-\frac{6}{n}, 6-\frac{57}{n}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}\sqrt{n}-1+\frac{3\sqrt{3\pi}}{16}n^{-1/2}, \frac{4-\pi}{3}n-\frac{7}{6}-\frac{3}{8}\pi+\frac{5\pi-24}{384}\frac{1}{n}$

Apériodique, dérive ≥ 0 (Marche de Motzkin avec 2 pas avants, $\rho = (2\sqrt{2}-1)/7$) :

$[-1,-1]$	énumération	effleurements (μ,σ^2)	altitude finale (μ,σ^2)
$F(z,0)$	$\frac{\frac{1}{4}\sqrt{44+25\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{\rho^{-n}}{n^{3/2}}+\frac{\frac{21}{128}\sqrt{568+338\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{\rho^{-n}}{n^{5/2}}$	$3+\sqrt{2}-\frac{3(17+6\sqrt{2})}{4n}, 5+3\sqrt{2}-\frac{3(107+60\sqrt{2}}{4n}$	0
$F(z,1)$	$\frac{4^n}{2}-\frac{\frac{1}{4}\sqrt{1348-953\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{\rho^{-n}}{n^{3/2}}$	$1-\frac{\sqrt{232-163\sqrt{2}}}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}\rho^n P(1)^n}, 2-\frac{\sqrt{3928-\frac{5555}{2}\sqrt{2}}}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}\rho^n P(1)^n}$	$\frac{n}{4}+2-\frac{\sqrt{\frac{337}{16}-\frac{953}{64}\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi n}\rho^n P(1)^n}, \frac{11n}{16}-8+\frac{\sqrt{\frac{337}{256}-\frac{953}{1024}\sqrt{2}}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\rho^n P(1)^n}$

Apériodique, dérive ≤ 0 (Marche de Motzkin avec 2 pas arrière, $\rho = (2\sqrt{2}-1)/7$) :

$[+1,0,-1,-1]$	énumération	effleurements (μ,σ^2)	altitude finale (μ,σ^2)
$F(z,0)$	$\frac{\frac{1}{4}\sqrt{44+25\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{\rho^{-n}}{n^{3/2}}+\frac{\frac{21}{128}\sqrt{568+338\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{\rho^{-n}}{n^{5/2}}$	$3+\sqrt{2}-\frac{3(17+6\sqrt{2})}{4n}, 5+3\sqrt{2}-\frac{3(107+60\sqrt{2})}{4n}$	0
$F(z,1)$	$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{1348+953\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi}n^{3/2}\rho^n}+\frac{\frac{3}{64}\sqrt{197133736+139394546\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi}n^{5/2}\rho^n}$	$\frac{5}{2}-\frac{12+3\sqrt{2}}{n}, \frac{13}{4}+3\sqrt{2}-\frac{3(99+58\sqrt{2})}{4n}$	$2+2\sqrt{2}-\frac{195}{2n}, 8+6\sqrt{2}-\frac{3(563+398\sqrt{2})}{2n}$

FIG. 1 – Marches sur $\mathbb{N}$, modèle uniforme. Asymptotique suivant la périodicité et la dérive.

Pour tous les paramètres ci-dessus, on peut donner un développement asymptotique complet (j'ai tronqué ici au deuxième ou troisième terme asymptotique dominant, le terme suivant est n fois plus petit).

7. Quelques mots sur le modèle « probabilisé » avec barrière réfléchissante

Nous avons jusqu'à présent regardé un modèle « uniforme », c'est-à-dire dans lequel nous accordions le même « poids » à chacune des marches de longueurs n possibles.

Pour de l'énumération pure, c'est le modèle adéquat. Toutefois, différents phénomènes peuvent donner lieu à des marches pour lesquelles chaque saut a une probabilité fixée (et donc les marches de longueur n peuvent avoir des probabilités très différentes les unes des autres). C'est le modèle le plus courant chez les probabilistes.

De par la contrainte de positivité des marches que nous considérons, il convient cependant de préciser, non seulement quelle est la probabilité de faire un saut donné (la somme de ces probabilités faisant bien sûr 1), mais également que devient cette probabilité lorsqu'un (ou plusieurs) de ces sauts est « impossible » (car il ferait aller la marche dans les entiers négatifs).

Nous appelons « modèle probabilisé » avec barrière réfléchissante un tel modèle pour lequel on a un nombre fini de sauts possibles, chacun associé à une probabilité, et pour lequel le poids d'une marche est le produit des probabilités de ses sauts successifs. Nous sommes toujours dans le cadre de *marches homogènes en temps* mais l'homogénéité en espace est rompue à cause des conditions de bord, toutefois il nous est toujours possible de capter l'évolution de telles marches :

$$f_{n+1}(u) = P(u)\,\{u^{\geq c}\}f_n(u) + \sum_{i=0}^{c-1} P_i(u)\{u^i\}f_n(u) \tag{42}$$

où c est le plus grand saut en arrière et où les P_i décrivent comment sont réparties les probabilités de faire tel ou tel saut quand on est à hauteur i (puisqu'alors certains sauts donnés par P ne sont plus possibles).

Théorème 7 (Algébricité des séries génératrices dans le modèle probabilisé avec barrière réfléchissante).
La série génératrice d'une marche probabilisée sur $\mathbb{N}$ est algébrique et vaut

$$F(z,u) = \frac{1 + z\sum_{i=0}^{c-1}(P_i(u) - P(u))\,u^i\frac{\partial_u^i}{i!}F(z,0)}{1 - zP(u)},$$

où les $\partial_u^i F(z,0)$ sont algébriques, déterminées par la méthode du noyau.

Démonstration. La récurrence (42) se récrit

$$f_{n+1}(u) = P(u)\left(f_n(u) - \{u^{<c}\}f_n(u)\right) + \sum_{i=0}^{c-1} P_i(u)u^i\frac{\partial_u^i}{i!}f_n(0)$$

ce qui, en multipliant par z^{n+1} et en sommant pour $n \geq 0$, mène directement à l'équation fonctionnelle

$$(1 - zP(u))\,F(z,u) = 1 + z\sum_{i=0}^{c-1}(P_i(u) - P(u))\,u^i\frac{\partial_u^i}{i!}F(z,0)\,.$$

Le membre droit comporte c inconnues, en utilisant la méthode du noyau, on obtient ainsi une expression de $F(z,u)$ en fonction des c racines (convergentes en 0) du noyau, donc $F(z,u)$ est algébrique. $\square$

Exemple 45. *Marche de Dyck probabilisée avec barrière réfléchissante*
Regardons le cas d'une marche de Dyck où l'on fait un pas $+1$ (resp. -1) avec probabilité a (resp. b) et quand on est à hauteur 0, on fait un saut $+1$ avec probabilité 1. La récurrence est

$$f_{n+1}(u) = \left(au + b\frac{1}{u}\right)\{u^{\geq 1}\}f_n(u) + u\{u^0\}f_n(u)$$

d'où l'équation fonctionnelle

$$(1 - zP(u))\,F(z,u) = 1 + z\,(u - P)\,F(z,0)\,,$$

et au final, en notant $u_1(z) = \frac{1-\sqrt{1-4abz^2}}{2az}$ la petite branche du noyau, on obtient la forme close suivante

$$F(z,0) = \frac{1}{bz\,(1/u_1(z) - u_1(z))}\,.$$

Il est immédiat d'appliquer les mêmes techniques pour capter les séries génératrices trivariées $F(z,u,t)$ de différents paramètres, par exemple, pour les effleurements

$$F(z,0,t) = \frac{1}{z\,(-tu_1(z) + au_1(z) + b/u_1(z))}\,.$$

■

On trouvera à la figure ci-dessous différents résultats asymptotiques, que l'on peut obtenir par analyse de singularité, relatifs aux marches probabilisées.

		énumération	effleurements (μ,σ^2)
$F(z,1)$	$\delta > 0$	1	$O(1), O(n)$
	$\delta = 0$	1	$\sqrt{n}, O(n^2)$
	$\delta < 0$	1	$O(n), O(n^3)$
$F(z,0)$	$\delta > 0$	$O(\rho^{-n}n^{-3/2})$	$O(\rho^{-n}n^{-3/2}), O(\rho^{-n}n^{-3/2})$
	$\delta = 0$	$O(n^{-1/2})$	$O(1), O(n)$
	$\delta < 0$	$O(1)$	$O(n), O(n^3)$

Marches sur $\mathbb{N}$, modèle probabilisé avec barrière réfléchissante ($\delta = P'(1)$ indique la dérive).

8. Prospective : aire et hauteur

J'aimerais finir ce chapitre par une section un peu plus prospective. Nous avons traité montré précédemment comment obtenir un développement asymptotique complet (et les lois limites) pour différents paramètres (effleurements, altitude finale). Nos résultats, valides pour toutes les marches à sauts bornés (et généralisant donc le cas $c = 1$ des marches de type Łukasiewicz, qui correspond aux modèles de familles simples d'arbres), montrent qu'en un certain sens, les résultats des marches de Łukasiewicz (plus aisés à établir) ont lieu en fait pour l'ensemble des marches de type fini (intuitivement, on pouvait se douter que les résultats coïncideraient, au premier ordre asymptotique, à cause de l'universalité de l'excursion brownienne).

Pour ces mêmes raisons, il est attendu que deux paramètres très intéressants mais assez difficiles à étudier en combinatoire analytique, l'aire et la hauteur, vont suivre dans le cas général des marches à sauts bornés les mêmes lois limites que dans les cas « simples » des marches de Łukasiewicz (seul saut arrière $= -1$).

Pour l'aire (ou encore pour la longueur de cheminement), des résultats de G. Louchard [**93**] et de L. Takacs [**119**] montrent que l'on a une loi limite Airy (dite de « type aire » [**63**]), et une approche due à Ph. Duchon [**47**] suggère qu'il en est de même pour divers paramètres « additifs » que l'on suit par des grammaires attribuées. En ce qui concerne la combinatoire analytique, pour l'aire des marches classiques (Dyck, Motzkin, ...), on peut trouver des récurrences « directes » (comme données par l'école Florentine [**96, 103**]) et aboutir à des séries génératrices algébriques ; l'asymptotique est alors aisée : pour les chemins, l'aire moyenne est

$$\mu_n(1) = \frac{n^{3/2}}{2P(1)\sqrt{P(1)\pi}} - n + O(\sqrt{n}),$$

et pour les excursions, l'aire moyenne est

$$\mu_n(0) = \frac{3n^{3/2}}{4P(1)\sqrt{P(1)\pi}} - n + O(\sqrt{n}).$$

(Notons qu'il y a un lien entre l'aire sous un chemin de Motzkin et l'énumération d'animaux dirigés suivant leur taille [**80**].) Malheureusement, dans le cas général, cela se gâte sérieusement (on n'a plus de jolies formes closes), une piste est de considérer les équations fonctionnelles auxquelles on aboutit à partir de

$$f_{n+1}(u,q) = \{u^{\geq 0}\}P(u\sqrt{q})f_n(uq,q),$$

de les dériver pour établir des récurrences entre les moments de différents ordres, qui donnerait ainsi la loi d'Airy. Je compte poursuivre cette piste dans des travaux à venir.

Pour la hauteur, Flajolet-Odlyzko [**64**] ont montré que la hauteur H_n des familles simples d'arbres a une loi limite qui met en jeu une fonction elliptique thêta,

$$\theta(x) := \sum_n \exp(-n^2x^2)(1-4n^2x^2). \tag{43}$$

Là aussi, on s'attend (encore de par l'universalité de l'excursion brownienne) à ce que ce résultat se généralise aux marches de type fini, avec une hauteur moyenne $\sqrt{n}$ et une loi limite de type thêta. La question combinatoire est d'autant plus passionnante qu'elle est reliée à notre discussion sur les petites racines données par la méthodes du noyau ! Notons que le paramètre de hauteur de l'excursion est étroitement lié au coût d'un parcours itératif de l'arbre, tandis que la hauteur de l'arbre correspond au parcours récursif. Je jette ci-après les premiers pas d'une étude de la **Hauteur moyenne de la marche** $+2,-1$.

La marche sur $\mathbb{N}$ à pas $+2,-1$ a pour polynôme caractéristique $P(u) = u^2 + \frac{1}{u}$ et la série génératrice de la marche vérifie l'équation fonctionnelle :

$$(1 - zP(u))\,F(z,u) = 1 - z\frac{F(z,0)}{u}$$

Le noyau $(1-zP(u))$ possède trois racines $u_1(z), u_2(z), u_3(z)$. Nous noterons u_1 la branche réelle $\sim z$ en 0, u_2 la branche $\sim z^{-1/2}$ en 0 et u_3 la branche $\sim -z^{-1/2}$ en 0. La branche u_2 vient rejoindre la branche u_1 en $z=\rho$, le rayon de convergence de $F(z,0)$.

La série génératrice des marches de hauteur $\leq h$ vérifie quant à elle l'équation fonctionnelle suivante :

$$(1 - zP(u))\,F^{[h]}(z,u) = 1 - z\left(\frac{F^{[h]}(z,0)}{u} + u^{h+1}\frac{D^{h-1}F^{[h]}(z,0)}{(h-1)!} + u^{h+2}\frac{D^{h}F^{[h]}(z,0)}{h!}\right)$$

La substitution des 3 racines u_i dans le noyau annule le membre de gauche et mène donc au système suivant (les t_i sont les $c+d$ fonctions inconnues) :

$$1 - z\left(\frac{t_0}{u_1} + u_1^{h+1}\frac{t_1}{(h-1)!} + u_1^{h+2}\frac{t_2}{h!}\right) = 0$$
$$1 - z\left(\frac{t_0}{u_2} + u_2^{h+1}\frac{t_1}{(h-1)!} + u_2^{h+2}\frac{t_2}{h!}\right) = 0$$
$$1 - z\left(\frac{t_0}{u_3} + u_3^{h+1}\frac{t_1}{(h-1)!} + u_3^{h+2}\frac{t_2}{h!}\right) = 0$$

L'application de la règle de Cramer nous donne alors

$$t_0 = F^{[h]}(z,0) = \frac{u_1}{z}\frac{D_h}{D_{h+1}}$$

où D_h est le déterminant de $\begin{pmatrix}1 & u_1^{h+1} & u_1^{h+2}\\ 1 & u_2^{h+1} & u_2^{h+2}\\ 1 & u_3^{h+1} & u_3^{h+2}\end{pmatrix}$. En développant ce déterminant, on obtient :

$$D_h = (u_2^{h+1}u_3^{h+2} - u_2^{h+2}u_3^{h+1}) - (u_3^{h+2}u_1^{h+1} - u_1^{h+2}u_3^{h+1}) + (u_1^{h+1}u_2^{h+2} - u_1^{h+2}u_2^{h+1})$$

En posant $v_1 := u_2u_3, v_2 := u_1u_3, v_3 := u_1u_2$, on a :

$$D_h = (u_3 - u_2)v_1^{h+1} + (u_1 - u_3)v_2^{h+1} + (u_2 - u_1)v_3^{h+1}.$$

La série génératrice des excursions qui passent par un point de hauteur $> h$ est donc

$$F(z,0) - F^{[h]} = \frac{u_1}{z} - \frac{u_1}{z}\frac{D_h}{D_{h+1}} = \frac{u_1}{z}\frac{D_{h+1} - v_1D_h}{D_{h+1}}$$

$$= \frac{u_1}{z}\frac{\left((u_1-u_3)v_2^{h+2} + (u_2-u_1)v_3^{h+2}\right) - v_1\left((u_1-u_3)v_2^{h+1} + (u_2-u_1)v_3^{h+1}\right)}{v_1D_{h+1}}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par v_1^{h+1} et en posant $w := \frac{v_2}{v_1} = \frac{u_1}{u_2}$, on a la formule exacte

$$F - F^{[h]} = \frac{u_1}{z}\frac{(v_2-v_1)(u_1-u_3)w^{h+1} + (v_3+v_1)(u_2-u_1)\left(\frac{v_3}{v_1}\right)^{h+1}}{v_1\left((u_3-u_2)v_1 + (u_1-u_3)v_2w^{h+1} + (u_2-u_1)v_3\left(\frac{v_3}{v_1}\right)^{h+1}\right)}.$$

Comme $\left|\frac{v_3}{v_1}\right| < 1$ quand $z \sim \rho$, on attend :

$$F - F^{[h]} \approx \frac{u_1}{z}\frac{(v_2-v_1)(u_1-u_3)w^{h+1}}{(u_3-u_2)v_1^2 + (u_1-u_3)v_2v_1w^{h+1}},$$

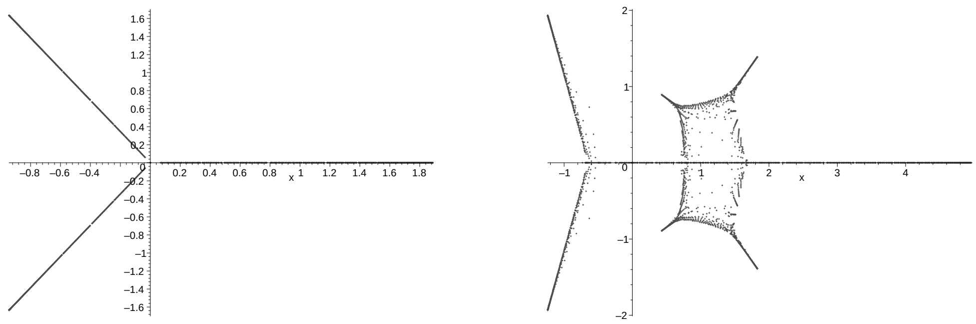
où $\approx$ désigne une approximation analytique pour un certain domaine de (z,h) (non explicité ici) avec $z \to \rho^-, h \to \infty$ En posant $a(z) := w\frac{u_1-u_3}{u_2-u_3}$ (n.b. : $a(z) \sim 1$ quand $z \to \rho^-$), on se ramène donc à l'étude de

$$F - F^{[h]} \sim \frac{u_1}{z}\left(\frac{u_3}{u_1}\right)(1-w)\frac{w^{h+1}}{1 - a(z)w^{h+1}}$$

En considérant $a(z)$ comme une perturbation, nous avons alors ramené le problème à l'étude de la forme simplifiée

$$\widetilde{F} - \widetilde{F}^{[h]} \approx \frac{u_3}{z}(1-w)\frac{w^{h+1}}{1-w^{h+1}}. \tag{44}$$

Une telle forme étant précisément du type apparaissant dans l'article de Ph. Flajolet et A. Odlyzko [**64**] pour la hauteur des arbres, on est content et on peut espérer recycler leur analyse et la loi limite suit par convergence de moments. Toutefois, il faudrait établir la validité de l'approximation (44) dans une région en z de type camembert et avec une uniformité suffisante : ceci passe par la localisation des zéros des polynômes D_h (travail en cours) pour lesquels il faut établir (par Rouché ?) que les zéros sont hors d'un camembert fondamental. Il est à noter en tout cas que l'approximation (44) généralise agréablement les formules exactes des excursions de Bernoulli (les marches $\{-1,+1\}$) telles que données par De Bruinj, Knuth et Rice [**41**].



Aux rencontres Aléa 2001, au CIRM, à Luminy, Jesper Lykke Jacobsen avait conjecturé (après des vérifications numériques sur le cas $\{-2,+1\}$, voir ci-dessus à gauche) que les valeurs propres réelles étaient toujours positives. Dans le cas général (voir ci-dessus à droite pour le cas $\{-3,-1,-1,0,+1,+4\}$), l'ensemble des valeurs propres a des propriétés remarquables mais un peu plus compliquées.

CHAPITRE 5

Cols coalescents et loi d'Airy

Résumé : Ce chapitre est consacré aux cartes planaires (et à leurs cousins les graphes), pour lesquels nous appliquons des méthodes de cols pour étudier de façon fine le phénomène de transition de phase pour la forte-connexité (en ajoutant aléatoirement des arêtes à une carte donnée, quand sommes-nous assurés d'avoir une composante k-connexe ?). Nous dégageons le rôle fondamental joué par ce que nous baptisons la **loi d'Airy des cartes**, dont nous montrerons l'universalité au sens où de nombreux problèmes avec **coalescence de points cols** entraînent cette loi.

Ce chapitre est la continuation de travaux de Gilles Schaeffer [**111**] et correspond à l'article [**10**] « Random Maps, Coalescing Saddles, Singularity Analysis, and Airy Phenomena » (soumis à Random Structure and Algorithms) que j'ai réalisé avec Philippe Flajolet, Gilles Schaeffer et Michèle Soria. Une version conférence « Cartes planaires et phénomène d'Airy » avait été présentée au colloque ICALP'2000 [**9**].

Les principaux résultats de cet article sont

- le théorème 2 (p. 138) qui donne la taille du noyau au point de transition (via une méthode de col double);
- le théorème 3 (p. 140) qui donne la taille du noyau au voisinage du point de transition (via une méthode de cols voisins) ;
- le théorème 4 (p. 142) qui donne la taille du noyau uniformément sur tout une zone contenant le point de transition (via une méthode de points cols coalescents) ;
- le théorème 5 (p. 148) qui montre l'universalité de loi d'Airy, qui est liée aux schémas de composition $(3/2 \circ 3/2)$;
- le théorème 6 (p. 155) qui montre que diverses familles de cartes ont un noyau dont la taille est régie par une loi d'Airy ;
- le théorème 7 (p. 156) qui montre que, pour diverses familles de cartes, la taille de la plus grande composante multi-connexe est régie par une loi d'Airy ;
- le théorème 11 (p. 160) qui relie les schémas de compositions aux lois stables.

Tous ces résultats sont nouveaux dans le monde de la combinatoire, seules des versions probabilistes étaient connues (*e.g.*, les lois stables).

J'ai joué un rôle « central » dans cet article, mes contributions majeures étant d'une part de développer une approche par méthode de cols (doubles ou voisins), et d'autre part d'étudier la fonction d'Airy en soi.

ABSTRACT. A considerable number of asymptotic distributions arising in random combinatorics and analysis of algorithms are of the exponential-quadratic type, that is, Gaussian. We exhibit a class of "universal" phenomena that are of the exponential-cubic type, corresponding to distributions that involve the Airy function. In this paper, such Airy phenomena are related to the coalescence of saddle points and the confluence of singularities of generating functions. For about a dozen types of planar maps, a common Airy distribution (equivalently, a stable law of exponent 3/2) describes the sizes of cores and of largest (multi)connected components. Consequences include the analysis and fine optimization of random generation algorithms for multiply connected planar graphs, as well as the general classification of compositional schemas in analytic combinatorics.

Introduction

Maps are planar graphs embedded in the plane, and as such, they model the topology of many geometric arrangements in the plane and in low dimensions (*e.g.*, 3-dimensional convex polyhedra). This paper concerns itself with the statistical properties of random maps, *i.e.*, the question of what such a random map typically looks like. We focus here on connectivity issues, with the specific goal of finely characterizing the size of the highly connected "core" of a random map.

The bases of an enumerative theory of maps have been laid by Tutte [**121**] in the 1960's, this in an attempt to attack the four-colour conjecture. The present paper builds upon Tutte's results and upon previous analyses of largest components given by Bender, Richmond, Wormald, and Gao [**20, 76**]. We establish the common occurrence of an interesting probability distribution, the "Airy distribution of the map type", that precisely quantifies the sizes of cores in about a dozen varieties of maps, including general maps, triangulations, 2-connected maps, etc. As a corollary, we are able to improve on the complexity of the best known random samplers for multiply connected planar graphs and convex polyhedra from [**112**].

The analysis that we introduce is largely based on a method of "coalescing saddle points" that was perfected in the 1950's by applied mathematicians [**16, 21, 128**] and has found scattered applications in statistical physics and the study of phase transitions [**107**]. However, this method does not appear to have been employed so far in the field of random combinatorics. We claim some generality for the approach proposed here on at least two counts. First, a number of enumerative problems are known to be of the "Lagrangean type", being related to the Lagrange inversion theorem and its associated combinatorics. The classical saddle point method is then instrumental in providing asymptotics of simpler problems. However, the confluence of saddle points that presents itself in "critical regions" is a stumbling block for the basic method. As we show here, planar maps are precisely instances of this situation. Next, parallel developments suggested by the theory of random maps and the corresponding integration contours lead to the precise analysis of a general composition schema. Indeed, it is known, in the realm of analytic combinatorics, that asymptotic properties of random structures are closely related to singular exponents of counting generating functions. For "most" recursive objects the exponent is $\frac{1}{2}$ and the probabilistic phenomena are described by classical laws, like Gaussian, exponential, or Poisson. Methods of the paper permit us to quantify distributions associated with singular exponents $\frac{3}{2}$ present in maps and unrooted trees, and, more generally, they extend to distributions occurring in relation to compositions of generating functions with algebraic-logarithmic singularities.

Very roughly, the classical saddle point method gives rise to probabilistic and asymptotic phenomena that are in the scale of $n^{1/2}$ and the analytic approximations are in the form of an "exponential-quadratic" (e^{-x^2}) corresponding to Gaussian laws. The coalescent saddle-point method presented here gives rise to phenomena in the scale of $n^{1/3}$, with analytic approximations of the "exponential-cubic type" (e^{ix^3}), which, as we shall explain, is conducive to Airy laws. The Airy phenomena that we uncover in random combinatorics should thus be expected to be of a fair degree of universality. Here are scattered occurrences of what we recognize as Airy phenomena in the perspective of this paper: the emergence of first cycles and of the giant component in the Erdős-Rényi graph model [**62, 68, 83**], the enumeration of random forests of unrooted trees [**87**], cluster formation in the construction of linear probing hashed tables [**67, 86**], the area under excursions and the cumulative storage cost of dynamically varying stacks [**93**], the area of certain polyominoes [**47**], path length in combinatorial tree models [**119**], and, perhaps, the threshold phenomena involved in the celebrated random 2-SAT problem [**22**]. We briefly return to these questions in the conclusion section of the paper.

Plan of the paper. Basics of maps are introduced in Section 1 where the Airy distribution is presented. The enumerative theory can be developed along two parallel lines, one Lagrangean, the other based on singularity analysis. We first approach the analysis of core size via the Lagrangean framework and variations of the saddle point method: a fine analysis of the geometry of associated complex curves is shown to open access to the size of the core, with the Airy distribution arising from double or "nearby" saddles (Section 2); a refined analysis based on the method of coalescent saddle points then enables us to quantify the distribution of core size over a wide range with precise large deviation estimates (Section 3). By singularity analysis techniques, we show more generally that the very same Airy law is bound to occur in any instance of a composition schema of singular type ($\frac{3}{2} \circ \frac{3}{2}$), which sheds a different light on the previous analyses; see Section 4. The methods based on saddle points and singularities are then applied to about a dozen types of planar maps, thereby providing a precise quantification of largest multiconnected components, with consequences on the random generation of highly connected planar graphs (Section 5). Finally, the singularity analysis methods can be extended to any composition schema that is "critical": see Appendix 7.1 where connections with stable distributions of probability theory are also discussed. Major analytic properties of the Airy distribution "of the map type" are gathered in Appendix 7.2. Here is a diagram summarizing the logical structure of the paper:

1. Basics of maps

2. Two saddles | 4. Singularity Analysis
3. Coalescing saddles | (A. Compositions, stable laws)

5. Largest components
(B. Airy distribution)

An extended abstract of this paper has been presented at the *ICALP'2000* conference; see [**9**].

1. Basics of maps

This section organizes known facts about the enumeration of maps for the convenience of readers not familiar with this chapter of combinatorial theory. It is intended as a preparation of the technical treatment in Sections 2–5 that rely on the Lagrangean framework (which provides exact power representations for map counts) and on singularity analysis (which provides direct asymptotic estimates).

A *map* is an embedding of a connected *planar* graph in the sphere, considered up to orientation preserving homeomorphisms. By construction the complement of the vertices and edges of a map in the sphere is a union of simply connected *faces*. In general loops and multiple edges are allowed. A map is completely characterized by its underlying graph together with a cyclical ordering of edges around each vertex. Following Tutte [**120, 121**], we consider *rooted* maps, that is, maps with an oriented edge called the *root*—this simplifies the analysis without essentially affecting statistical properties (see [**110**] and Section 5). In order to represent maps on the plane, a point of the sphere must be placed at infinity; by convention we always choose it so that the root runs along the infinite face counterclockwise. Figure 1 illustrate this convention. *From now on, unless explicitly mentioned, all maps are rooted.*

Generically, we take $\mathcal{M}$ and $\mathcal{C}$ to be two classes of maps, with $\mathcal{M}_n$, $\mathcal{C}_n$ the subsets of elements of size n (typically, elements with n edges). Here, $\mathcal{C}$ is always a subset of $\mathcal{M}$ that satisfies additional properties—typically, higher connectivity. The elements of $\mathcal{M}$ are then called the "basic maps" and the elements of $\mathcal{C}$ are called the "core-maps". We define informally the *core-size* of a map $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$ as the size of the largest $\mathcal{C}$–component of $\mathfrak{m}$ that contains the root of $\mathfrak{m}$.

As a pilot example, we shall specialize the basic maps $\mathcal{M}$ to be the class of all[1] maps with size taken as the number of edges. Define a *separating vertex* (or *articulation point*) as a vertex whose removal disconnects the graph. The class $\mathcal{C}_k$ will then be taken as the set of nonseparable maps with k edges, where a map is called *nonseparable* (or *2-connected*) if it has no separating vertex. In this case, the *core* of a map is obtained by starting from the root and removing all "pending" submaps that are attached only through an articulation point. This is illustrated by Figure 2, in which the central map on the right is a nonseparable map, namely the core of the map displayed on the left.

Our major objective is to characterize the probabilistic properties of core-size of a random element of $\mathcal{M}_n$, that is, of a random map of size n, when all elements are taken equally likely. Core-size then becomes a random variable X_n defined on $\mathcal{M}_n$. In essence, the pilot example thus deals with 2-connectivity in random (connected) maps. The paradigm that we illustrate by a particular example is in fact of considerable generality as can be seen from Section 5 below.

[1] We also speak of the class of "general" maps when we need to contrast it with special classes of maps.

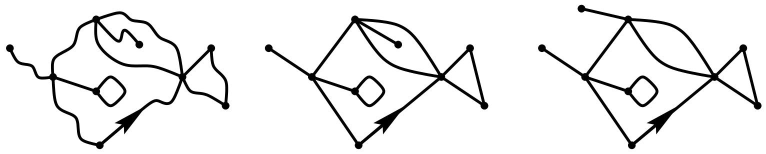


Figure 1: Three representations of maps. The first two are identical as maps, while the third one is not, although the three underlying planar graphs are identical.

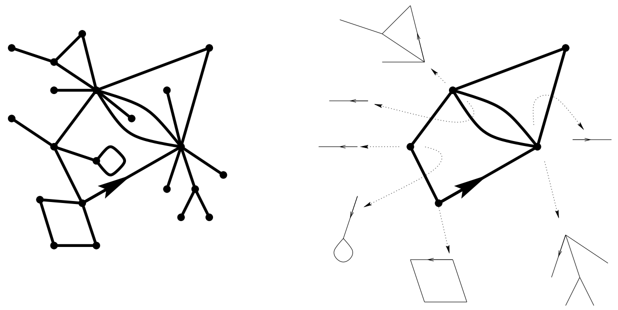


Figure 2: The decomposition of a map into its nonseparable core and the pending submaps.

1.1. The physics of maps. From earlier works [**20, 76, 111**], it is known that a random map of $\mathcal{M}_n$ has with high probability a core that is either "very small" (roughly of size $k = O(1)$) or "very large" (being $\Theta(n)$). The probability distribution $\mathrm{Prob}(X_n = k)$ thus has two distinct modes. The small region (say $k = o(n)$) has been well quantified by previous authors, see [**20, 76, 111**]: a fraction $p_s = \frac{2}{3}$ of the probability mass is concentrated there. The large region is also known from these authors to have probability mass $p_\ell = 1 - p_s = \frac{1}{3}$ concentrated around $\alpha_0 n$ with $\alpha_0 = \frac{1}{3}$ but this region has been much less explored as it poses specific analytical difficulties. Our results precisely characterize what happens in terms of an Airy distribution.

The Airy function $\mathrm{Ai}(z)$, as introduced by the Royal Astronomer Sir George Bidell Airy, is a solution of the equation $y'' - zy = 0$ that can be defined by a variety of integral or power series representations including (see [**1, 123**]):

$$\begin{aligned} \mathrm{Ai}(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(zt+t^3/3)}\,dt \\ &= \frac{1}{\pi 3^{2/3}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(3^{1/3}z\right)^n \frac{\Gamma((n+1)/3)}{n!}\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}. \end{aligned} \tag{45}$$

Equipped with this definition, we present the main character of the paper, a probability distribution closely related to the Airy function.

Definition 1. *The standard Airy distribution (of the "map type") is the probability distribution whose density is*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= 2e^{-2x^3/3}\left(x\mathrm{Ai}(x^2) - \mathrm{Ai}'(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{\pi x}\sum_{n\ge 1}(-x3^{2/3})^n\frac{\Gamma(2n/3+1)}{n!}\sin(-2n\pi/3). \end{aligned} \tag{46}$$

The Airy distribution of parameter c is defined by the density $c\mathcal{A}(cx)$.

Major properties of the function $\mathcal{A}(x)$ (including the equivalence between the two definitions of (46)) are gathered in Appendix 7.2. The Airy distribution[2] is a probability distribution, *i.e.*, $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(x)\,dx = 1$, and an unusual feature is the fact that the tails are extremely

[2] The Airy distribution of the map type is known in the probability literature as a stable law of index $\frac{3}{2}$ (see Appendix 7.1), and in celestial mechanics as the Holtsmark distribution.

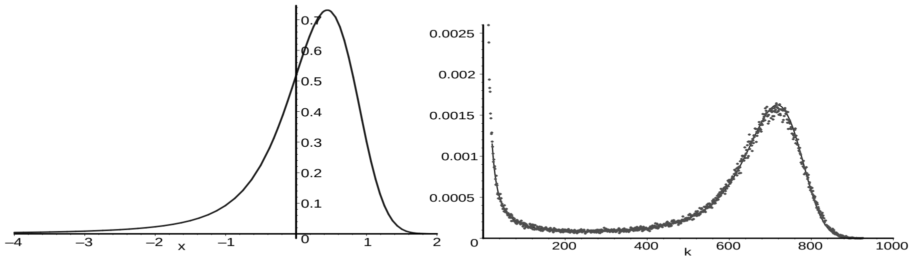


Figure 3: Left: The standard Airy distribution. Right: Observed frequencies of core-sizes $k \in [20; 1000]$ in 50,000 random maps of size 2,000, showing the bimodal character of the distribution.

asymmetric:

$$\mathcal{A}(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{\pi}}|x|^{-5/2} \quad \text{and} \quad \mathcal{A}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, x^{1/2} \exp\left(-\frac{4}{3}x^3\right). \tag{47}$$

A plot of the map–Airy distribution is presented in Figure 3 (left).

We shall find that the size of the core (when conditioned upon the large region) and the size of the largest 2-connected component of a random map are described asymptotically by an Airy law of this type. Figure 3 (right) exemplifies this with simulation results of core size: the "bimodal" character of the combinatorial distribution is clearly visible and the convergence of simulation data to the limit Airy distribution curve is already excellent at size $n = 2,000$. (Additional simulation data are given in Section 5.4.)

1.2. The combinatorics of maps. Let M_n and C_k be the cardinalities of $\mathcal{M}_n$ and $\mathcal{C}_k$. The *generating functions* of $\mathcal{M}$ and $\mathcal{C}$ are respectively defined by

$$M(z) := \sum_{n\geq 1} M_n z^n \qquad \text{and} \qquad C(z) := \sum_{k\geq 1} C_k z^k.$$

Root-face decompositions. As shown by Tutte, there results from a root-face decomposition and from the quadratic method [**79**, Sec. 2.9] that many families of maps have a generating function $M(z)$ that is algebraic, and more specifically *Lagrangean*, which means that it can be parametrized by a system of the form

$$M(z) = \Psi(L(z)) \quad \text{where} \quad L(z) = z\phi(L(z)), \tag{48}$$

for two rational power series Ψ, ϕ, with L being determined implicitly by ϕ. We first prove that $M(z)$ is Lagrangean.

Proposition 1. *The generating function of general maps $M(z)$ is Lagrangean:*

$$\begin{aligned} M(z) &= \Psi(L(z)), \qquad & L(z) &= z\phi(L(z)) \\ \Psi(y) &= \frac{1}{3}y(2-y), \qquad & \phi(y) &= 3(1+y)^2. \end{aligned} \tag{49}$$

Accordingly, the number of general maps satisfies

$$M_n \equiv [z^n]M(z) = \frac{2\cdot 3^n\,(2n)!}{(n+2)!\,n!} \tag{50}$$

PROOF (SKETCH). Schematically, for the family of general maps with n edges, the treatment goes as follows. Let $M^\diamond(z,u)$ be the bivariate generating function of maps where z,u mark respectively the number of edges and the degree of the root face. Also the map of size 0 with one vertex and no edge is momentarily allowed. (Consequently, $M(z) = M^\diamond(z,1) - 1$.) First, the functional equation

$$M^\diamond(z,u) = 1 + u^2 z M^\diamond(z,u)^2 + uz\frac{M^\diamond(z,1) - uM^\diamond(z,u)}{1-u} \tag{51}$$

reflects the construction of maps starting from the map of size 0 by either adding an isthmus (also known as bridge) that connects two simpler maps, or by adding an edge that cuts across an existing face. From (51), upon isolating $M^\diamond(z,u)$, one gets the equivalent "quadratic form"

$$(M^\diamond(z,u) - R(z,u))^2 = Q(z,u) + \frac{M^\diamond(z,1)}{u(1-u)}, \tag{52}$$

for some explicit rational functions $Q(z,u)$ and $R(z,u)$. The principle of the quadratic method is to bind z and u in such a way (*a priori* unknown) that the left hand side vanishes. Consequently, under the binding, the right side of (52) should have a double root, which is expressed by the conditions

$$\left(Q(z,u) + \frac{M^\diamond(z,1)}{u(1-u)}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(Q(z,u) + \frac{M^\diamond(z,1)}{u(1-u)}\right) = 0.$$

The compatibility condition of these two equations is then expressed by two rational relations between the three quantities $M^\diamond(z,1)$, u, and z, from which one finds that $u = u(z)$ should satisfy $u^2 z + (u-1)(2u-3) = 0$. Computations based on the further change of parameter $L = 1/(1-u)$ (see [**79, 120**] and Section 5 for other examples) then lead to the Lagrangean parametrization (49).

There results from the form (48) and from the Lagrange inversion theorem [**79**] an explicit form for the coefficients of $M(z)$, namely,

$$M_n \equiv [z^n]M(z) = \frac{1}{n}[y^{n-1}]\Psi'(y)\phi(y)^n, \tag{53}$$

where $[z^n]F(z)$ denotes the coefficient of z^n in the series expansion of $F(z)$. For the family of general maps, this instantiates to (50) as given in the statement of the theorem. □

Alternatively, elimination shows that $M(z)$ is an algebraic function, in this case admitting of closed form:

$$M(z) = -1 + \frac{1}{54z^2}\left(-(1-18z) + (1-12z)^{3/2}\right). \tag{54}$$

Substitution decompositions. As shown again by Tutte, maps satisfy additionally relations of the "substitution type". Such relations usually take the form $\mathcal{M} = \mathcal{C} \circ \mathcal{H}$ where the family $\mathcal{H}$ is a simple variation of the "basic" family $\mathcal{M}$ while the "core" family $\mathcal{C}$ is defined by stronger connectivity constraints.

Proposition 2. *The generating function of nonseparable maps is Lagrangean:*

$$\begin{aligned} C(t) &= \Psi(\widetilde{L}(t)), & \widetilde{L}(t) &= t\,\widetilde{\phi}(\widetilde{L}(t)) \\ \Psi(y) &= \frac{1}{3}y(2-y), & \widetilde{\phi}(y) &= \frac{3}{(1-y/3)^2}. \end{aligned} \tag{55}$$

Accordingly, the number of nonseparable maps satisfies

$$C_k \equiv [z^k]C(z) = \frac{4(3k-3)!}{(2k)!(k-1)!}. \tag{56}$$

PROOF (SKETCH). Between the family $\mathcal{M}$ of general maps and the family $\mathcal{C}$ of nonseparable maps, the substitution relation

$$M(z) = \sum_{k\geq 1} C_k z^k (1+M(z))^{2k} = C(H(z)), \quad \text{with} \quad H(z) = z(1+M(z))^2, \tag{57}$$

expresses that each map is formed of a *core* with k edges (chosen among the C_k nonseparable maps with k edges) in which $2k$ (possibly empty) maps are substituted. This is exactly the decomposition illustrated by Figure 2: the core is obtained starting from the root edge[3] by detaching all pending submaps until there is no separation vertex left; conversely a submap can be attached at each of the $2k$ "corners" of a nonseparable map in order to form a general map.

An equation like (57) determines effectively (albeit in an implicit manner) the exact enumeration of objects of type $\mathcal{C}$ which are more "complex", *i.e.*, here, more highly connected than the initial maps of $\mathcal{M}$. One can go further. In view of Equations (48), (57), the generating function $H(z)$ is also expressible in terms of the basic Lagrangean series $L(z)$:

$$H(z) = \psi(L(z)) \quad \text{with} \quad \psi(y) = \frac{y}{3}\left(1-\frac{y}{3}\right)^2. \tag{58}$$

In order to extract the generating function $C(t)$ from the relation $M(z) = C(H(z))$, it is natural to introduce the change of variables $z = z(t)$ defined by $t = H(z)$, which yields $C(t) = M(z(t))$. As both $M(z)$ and $H(z)$ are defined in terms of $L(z)$, letting $\widetilde{L}(t) = L(z(t))$ leads to the system (55). This parametrization is finally amenable to the Lagrange inversion theorem, hence the expression (56) for the coefficients C_k. □

The proof also shows that the generating function $C(t)$ of nonseparable maps is a cubic algebraic function,

$$C^3 + 2C^2 + (1-18t)C + 27t^2 - 2t = 0,$$

that is an elementary variant of the generating function of ternary trees.

The core-size parameter. Our analysis assumes the *uniform distribution* over general maps of size n, with each map being taken with probability $1/M_n$. Under this model, we let X_n denote the random variable of core-size. Let $\mathcal{M}_{n,k}$ be the set of maps with n edges whose core comprises k edges; we define the *bivariate generating function*

$$M(z,u) = \sum_{n,k} M_{n,k} u^k z^n \quad \text{with } M_{n,k} = \mathrm{card}\,(\mathcal{M}_{n,k}).$$

The following obvious refinement of (57) gives access to core-size:

$$M(z,u) = C(uH(z)) \quad (\text{with } H(z) = z(1+M(z))^2). \tag{59}$$

In summary:

[3]Remark that this decomposition covers the cases when the root is a bridge or a loop, provided one adopts the convention that the two maps with one edge (*i.e.*, the bridge and the loop) are nonseparable.

Proposition 3. *The* probability distribution of core-size *is determined by*

$$\mathrm{Prob}(X_n = k) = \frac{C_k}{M_n}\,[z^n]H(z)^k, \tag{60}$$

where one has, with $\phi(y) = 3(1+y)^2$ *and* $\psi(y) = (y/3)(1-y/3)^2$*:*

$$[z^n]H(z)^k = \frac{k}{n}[y^{n-1}]\psi'(y)\psi(y)^{k-1}\phi(y)^n. \tag{61}$$

Proof. Relation (60) is a mere rephrasing of (59). The expression (61) results from (58) and Lagrange inversion. □

The involved generating functions are algebraic (and even rationally parametrized under the Lagrangean framework), which leads to complicated alternating binomial sums expressing $\mathrm{Prob}(X_n = k)$. The exponential cancellations involved are however not tractable in this elementary way, and complex asymptotic methods must be resorted to.

1.3. The asymptotics of maps. There is another side to the coin, to be explored further in Section 4. It relies on singularity analysis [**66**], the principle being a general correspondence between the expansion of a generating function at a singularity and the asymptotic form of its coefficients.

Proposition 4. *Each generating function* $M(z), C(z), H(z)$ *has a unique dominant singularity (at* $\frac{1}{12}, \frac{4}{27}, \frac{1}{12}$ *resp.) and a singular expansion with singular exponent* $\frac{3}{2}$ *at its singularity in the sense that*

$$\begin{cases} M(z) &=& \frac{1}{3} - \frac{4}{3}(1-12z) + \frac{8}{3}(1-12z)^{3/2} + O((1-12z)^2) \\ H(z) &=& \frac{4}{27} - \frac{4}{9}(1-12z) + \frac{16}{27}(1-12z)^{3/2} + O((1-12z)^2) \\ C(z) &=& \frac{1}{3} - \frac{4}{9}(1-27z/4) + \frac{8\sqrt{3}}{81}(1-27z/4)^{3/2} + O((1-27z/4)^2). \end{cases} \tag{62}$$

In particular, one has

$$M_n \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}12^n n^{-5/2}, \qquad \text{and} \qquad C_k \sim \frac{2}{27}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\left(\frac{27}{4}\right)^k k^{-5/2}. \tag{63}$$

Proof (sketch). In this proof, we purposely conduct the discussion in abstract terms, and relate the existence of such expansions to the general Lagrangean framework. The motivation stems from the need to cover the schemas of Section 5. (Clearly, singular expansions of M, C, H could be derived by direct computation while the asymptotic forms of (63) are obvious consequences of the closed-forms available for M_n, C_k in this particular instance.)

(*i*) *The universal asymptotics of maps.* An implicitly defined function $L(z) = z\phi(L(z))$ has in general an isolated singularity of the square-root type dictated by a failure of the implicit function theorem [**18, 94**]:

$$L(z) = \tau - l_{1/2}(1-z/\rho)^{1/2} + O(1-z/\rho) \qquad (l_{1/2} > 0); \tag{64}$$

there the singularity ρ and the singular value τ are determined by the equations

$$\tau\phi'(\tau) - \phi(\tau) = 0, \qquad \rho = \frac{\tau}{\phi(\tau)}. \tag{65}$$

The expansion (64) yields in turn the singular expansion of the generating function of maps via $M(z) = \Psi(L(z))$. It appears that in all known map-related parametrizations of the form (48), the cancellation $\Psi'(\tau) = 0$ holds, so that the singular exponent is shifted to 3/2:

$$M(z) = \Psi(L(z)) = \Psi(\tau) - m_1(1-z/\rho) + m_{3/2}(1-z/\rho)^{3/2} + O((1-z/\rho)^2). \tag{66}$$

(The constants $l_{1/2}, m_1, m_{3/2}$ are positive and computable from ϕ, Ψ, τ.) According to singularity analysis [**66**] (or the Darboux-Pólya method [**18**]), the singular expansion then entails

$$M_n \sim \frac{3m_{3/2}}{4\sqrt{\pi}} \frac{\rho^{-n}}{n^{5/2}}. \tag{67}$$

This generic asymptotic form is "universal" in so far as it is valid for all known "natural" families of maps (see Section 5 and the discussion in [**19**]).

(*ii*) *Substitution relations and asymptotics.* The substitution relation (57) entails another remarkable property of the asymptotic expansions of $M(z)$, $H(z)$ and $C(z)$. First, as H is defined in terms of M by $H(z) = z(1 + M(z))^2$, both H and M have the same dominant singularity, ρ, with singular exponent $3/2$. In particular, one has

$$H(z) = \psi(L(z)) = \psi(\tau) - h_1(1 - z/\rho) + h_{3/2}(1 - z/\rho)^{3/2} + O((1 - z/\rho)^2). \tag{68}$$

and, accordingly, the parametrization $H(z) = \psi(L(z))$ must also satisfy $\psi'(\tau) = 0$.

The function $\widetilde{L}$ that determines C is implicitly defined, so that its singularity $\widetilde{\rho}$ and singular value $\widetilde{\tau}$ are solutions of a system analogous to (65), which reduces to $\psi'(\widetilde{\tau}) = 0$, $\widetilde{\rho} = \psi(\widetilde{\tau})$. Accordingly, one has $\widetilde{\tau} = \tau$, hence $\widetilde{\rho} = \psi(\tau)$, and

$$C(t) = \Psi(\tau) - c_1(1 - t/\psi(\tau)) + c_{3/2}(1 - t/\psi(\tau))^{3/2} + O((1 - t/\psi(\tau))^2), \tag{69}$$

where c_1 and $c_{3/2}$ are computable positive numbers. This results in

$$C_k = [z^k]C(z) \sim \frac{3c_{3/2}}{4\sqrt{\pi}} \frac{\psi(\tau)^{-k}}{k^{5/2}}. \tag{70}$$

The analysis specializes for the families of general maps and nonseparable maps where it provides $\tau = 1$, $\rho = \frac{1}{12}$, $\psi(\tau) = \frac{4}{27}$. Hence, the singular expansions of (62) and the asymptotic forms (63) of the exact counts (50) and (56). $\square$

Propositions 3 and 4 open access to the distribution of core-size in two parallel ways.

(*i*) The structure constant τ which is by construction a saddle point of $\phi(z)/z$ plays a fundamental rôle, and from the preceding proof one has the "coalescence relations"

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\phi(z)}{z}\right)_{z=\tau} = 0, \qquad \frac{d}{dz}\left(\psi(z)\right)_{z=\tau} = 0. \tag{71}$$

The coalescence relations express the fact that τ is a saddle point common to $\phi(z)/z$ and $\psi(z)$. The saddle point analysis of Sections 2–3 takes off from the power forms (60), (61) provided by the Lagrangean framework and from the relations (71) which can be taken as basic axioms.

(*ii*) In terms of the composition equation $M(z) = C(H(z))$, the calculation above implies that the value of $H(z)$ at its singularity ρ coincides with the dominant singularity of $C(z)$:

$$H(\rho) = \text{r.o.c}\,(C(z)), \tag{72}$$

where "r.o.c." denotes radius of convergence. Such a composition $\mathcal{C} \circ \mathcal{H}$ is called *critical*. This situation of confluence of singularities is considered in full generality in Section 4 where the analysis of core size is developed from the power form (60) of Proposition 3 and from the criticality assumption (72).

Both approaches are "universal" for cores in map. Section 5 lists several other types of maps for which the coalescence relations (71) hold (with various rational function pairs ϕ, ψ), and for which core-size is described by a composition schema that is critical in the sense of (72) (with various algebraic functions C, M).

2. Two saddles

The probability distribution of core-size in maps is determined by Proposition 3 above. What is essentially needed is a way to estimate $[z^n]H(z)^k$. The saddle point approach starts from a contour integral representation based on the Lagrangean form, Equation (61), in

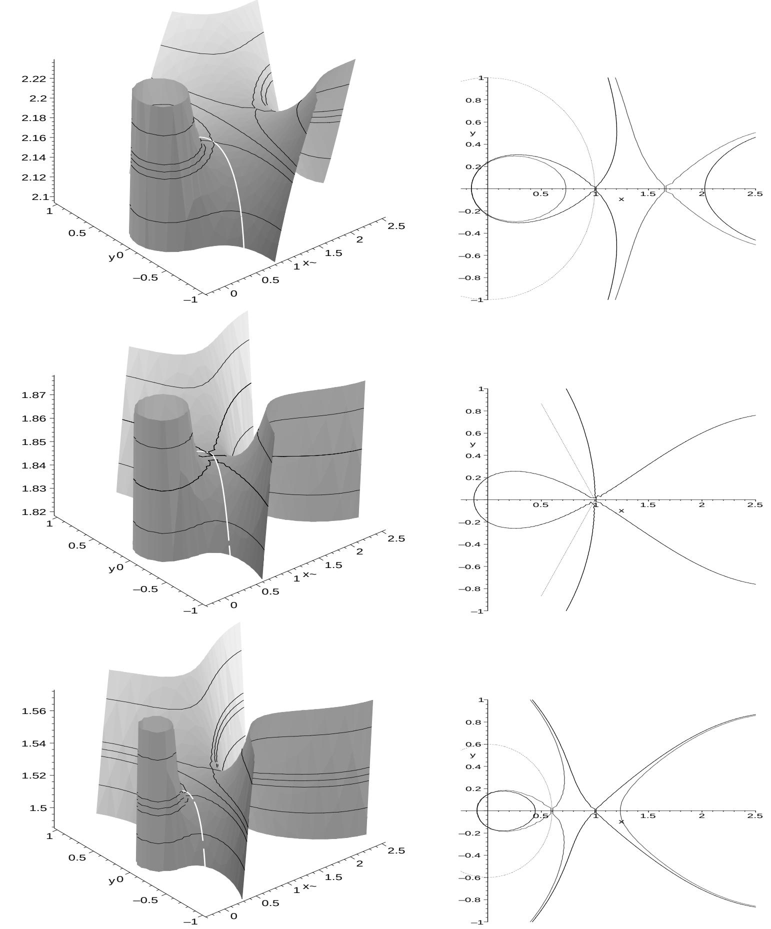


Figure 4: Saddle landscapes and paths of integrations. From top to bottom, $k = \alpha n$ with $\alpha = 1/6$, $\alpha = 1/3$, and $\alpha = 1/2$. The path of integration (dotted line) is seen to go through the dominant saddle which is double in the middle landscape and simple in the other two. Dark and soft gray lines are respectively the level curves $\Re(K(\tau))$ and $\Re(K(\tau'))$ of the kernel $K(z) = \alpha \log \psi + \log(\phi/z)$.

conjunction with Cauchy's coefficient formula,

$$
\begin{aligned}
(73)\qquad [z^n]H^k(z) &= \frac{k}{n}\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma z\psi(z)'\psi(z)^{k-1}\phi(z)^n\frac{dz}{z^{n+1}} \\
&= \frac{k}{n}\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma G(z)\ \exp(nK(z))\,dz
\end{aligned}
$$

There Γ is a contour encircling the origin anticlockwise, while

$$
(74)\qquad K(z) \equiv K(z;n,k) = \frac{k}{n}\log\psi(z) + \log(\phi(z)/z), \qquad \text{and} \qquad G(z) = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}
$$

are respectively the "kernel" and the "cofactor" of the integrand.

In simpler cases, integrals over complex contours involving large powers are amenable to the basic saddle point method. The idea consists in deforming the contour Γ in the complex plane, this, in order to have it cross a saddle point of the integrand, (*i.e.*, a zero of the derivative) and to take advantage of concentration of the integral near the saddle point. Then local expansions yield approximations that are of the "exponential quadratic" type when the saddle point is simple (*i.e.*, only the first derivative vanishes). We refer to de Bruijn's book for a vivid description of standard saddle point landscapes in connection with asymptotic analysis [**40**].

For the problem at hand, there are two real saddle points, given by the saddle point equation $\frac{\partial}{\partial z}K(z) = 0$, one is *fixed* and equal to τ, while the other varies with n, k. In particular, for nonseparable cores of general maps, one has

$$
(75)\qquad \tau = 1 \quad \text{and} \quad \tau' = 3\frac{n-k}{n+3k}.
$$

The relative positions of these two saddle points and the geometry of the integrand evolve with the ratio k/n, as shown by Figure 4. The basic saddle point method applies when these two points are sufficiently separated from one another, that is, as long as $\alpha := k/n$ is "far away" from the special value $\alpha_0 \equiv \frac{1}{3}$. This corresponds to the situation already known from the works [**20, 76, 111**]. The situation changes and there appears a "critical" region when k assumes values near $\alpha_0 n$ (as it turns out, in the scale of $n^{2/3}$). In that interesting case, the basic version of the saddle point method ceases to be applicable, and this is precisely where we fit in: by a detailed examination of the analytic geometry of the saddle points, we provide suitable integration contours that "capture" the main asymptotic contributions. Such an approach leads to a precise quantification of core-size in random maps. Figure 5 summarizes the main methods involved in the saddle-point analyses of this and the next section.

2.1. Distinct saddles. When k is far enough from $\alpha_0 n$, one of the two saddle points is nearer to the origin and predominates. In that case, the basic method applies, with the integration contour a circle centred at the origin and passing through the dominant saddle point. This corresponds to the already known results of Bender, Gao, Richmond, and Wormald [**20, 76**] supplemented by [**111**].

Theorem 1 (Tails and distinct saddles [**76**]). *Consider nonseparable cores of general maps. Let $\alpha = k/n$, $\alpha_0 \equiv 1/3$, and take ϵ an arbitrarily small positive number.*

(*i*) *The left tail of the probability distribution of core-size has a polynomial decay: uniformly for $\epsilon n < k < (\alpha_0 - \epsilon)n$, one has*

$$
\mathrm{Prob}(X_n = k) \sim \frac{1}{3^5\sqrt{\pi}}\frac{1}{k^{3/2}(\alpha_0-\alpha)^{5/2}}.
$$

k:	Left tail $[\epsilon n, (\alpha_0 - \epsilon)n]$	Centre $\alpha_0 n$	Right Tail $[(\alpha_0 + \epsilon)n, (1-\epsilon)n]$
Saddle points:	$\tau < \tau'$	$\tau = \tau'$	$\tau > \tau'$
Method:	simple saddle point (Section 2.1)	double saddle point (Section 2.2)	simple saddle point (Section 2.1)
Type:	$\int e^{-t^2} dt$	$\int te^{-t^3} dt$	$\int e^{-t^2} dt$
Angle:	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$
Error:	$n^{-1/2}$	$n^{-1/3+\epsilon}$	$n^{-1/2}$

k:	Central region $[\alpha_0 n + an^{2/3},\ \alpha_0 n + bn^{2/3}]$	"Wide" region $[\epsilon n,\ (1-\epsilon)n]$
Saddle points:	$\tau' \approx \tau$	
Method:	nearby saddle points (Section 2.3)	coalescing saddle points (Section 3)
Type:	$\int (x-t)e^{\ xt-t^3/3} dt$	$\int (x-t)e^{\ xt-t^3/3} dt$
Angle:	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\to$ cubic curve
Error:	$n^{-1/3+\epsilon}$	$n^{-1/3}$

Figure 5: Top: A broad classification of the methods involved in the classification of tails and centre of the core-size distribution. Bottom: Refinements of the saddle point method applicable to the critical region of the law of core-size.

(ii) The right tail has an exponential decay: there exists a positive constant $A < 1$ *such that, uniformly for* $(\alpha_0 + \epsilon)n < k < n(1-\epsilon)$*, one has*

$$\operatorname{Prob}(X_n = k) = O(A^n).$$

Proof (Sketch). We limit ourselves to brief indications on proof techniques (that rely on [**20**]), this merely to serve as a basis for comparison with the next sections. For both left and right tails, Γ is taken to be a circle through the saddle point that is "dominant" (in the sense that it is nearer to the origin). We denote by τ_d this dominant saddle point.

The main contribution to the integral arises from an immediate vicinity of τ_d. In this vicinity the kernel admits an expansion of the quadratic type

$$K(\tau_d + u) = K(\tau_d) - \kappa_2 \, |\alpha - \alpha_0| \, u^2 + O(u^3),$$

where κ_2 is a positive continuous function of α. In particular, provided α is far enough from α_0 the basic saddle point applies and the integral (73) is, up to lower order terms, given by the integral over a small vertical segment following the steepest descent line on both sides of τ_d. This yields

$$[z^n]H(z)^k \sim \frac{k}{n} \frac{\exp(K(\tau_d))^n}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} G(\tau_d + u) \exp(-n\kappa_2 \, |\alpha - \alpha_0| \, u^2 + O(nu^3)) du,$$

where the "range" δ is chosen so that

$$n\delta^2 \to \infty, \qquad n\delta^3 \to 0,$$

ensuring a complete local capture of the contribution as well as validity of the quadratic approximation. Here, we adopt $\delta = \log n/\sqrt{n}$.

The left tail ($k < \alpha_0 n$) corresponds to $\tau_d = \tau$, *i.e.*, the fixed saddle point τ is dominant (Fig. 4, top). In this case the expansion of $G(\tau+u)$ leads to part (i) of the theorem. Remark that the slow decay of probabilities ($k^{-3/2}$) in this region results from the formula

$$\mathrm{Prob}(X_n = k) = \frac{C_k[z^n]H(z)^k}{M_n}$$

where the exponential rate of growth of $[z^n]H(z)^k$, namely $\exp(K(\tau))^n = \rho^{-n}\psi(\tau)^k$, exactly compensates the exponential rate of decay of C_k/M_n.

The right tail ($k > \alpha_0 n$) has $\tau_d = \tau'$ dominating; (Fig. 4, bottom). This case leads to part (ii) of the theorem and the exponential decay of probabilities follows because $K(\tau') < K(\tau)$ does not allow $\exp(K(\tau'))^n$ to catch up with the exponential factor present in C_k/M_n. □

The saddle point method can lead in fact to precise estimates with correction terms to any order, as long as α stays away from α_0. For instance, one has for the right tail: *there exist two real functions* $f(\alpha)$ *and* $g(\alpha)$*, positive and continuous on the interval* $[1/3, 1]$*, such that*

$$\mathrm{Prob}(X_n = k) \sim \frac{(\alpha-\alpha_0)^{1/2}}{(1-\alpha)^{3/2}} f(\alpha)\, n^{-1/2} e^{-n(\alpha-\alpha_0)^3\, g(\alpha)},$$

uniformly for $\alpha_0 n + n^{2/3}\lambda(n) < k < n - n^{2/3}\lambda(n)$*, where* $\lambda(n)$ *is any function tending to infinity.*

2.2. A double saddle. We next analyse the "centre" of the distribution, that is, consider the case where $k = \alpha_0 n$ exactly. Then, the two saddle points of (75) become equal: $\tau' = \tau$. This case serves to introduce with minimal apparatus the enhancements that need to be brought to the basic saddle point method. Observe that the complete confluence of the saddle points precludes the use of "exponential-quadratic" approximations and the problem becomes of an "exponential cubic" type. The following statement is a variant, with error terms added, of Theorem 1, case (c), by Bender, Richmond, and Wormald [**20**]. (See also comments after the proof.)

Theorem 2 (Centre and a double saddle). *The centre of the probability distribution of the (nonseparable) core-size of a random element of* $\mathcal{M}_n$ *(general maps) satisfies, when* $k = \alpha_0 n$ *with* $\alpha_0 = \frac{1}{3}$*:*

$$\mathrm{Prob}(X_n = k) \sim \frac{3\sqrt{3}\, 2^{2/3}\Gamma(2/3)}{8\pi} k^{-2/3}\left(1 + O(n^{-1/3}(\log n)^4)\right). \approx .44441\, k^{-2/3}\,.$$

PROOF. We present the proof in the form of a general discussion of kernel (74), in the case of a double saddle point at τ when $k = \alpha_0 n$. In this way, generic formulæ like (78) below can be later reused for all families of maps listed in the Section 5. (For the case of nonseparable cores of general maps, one should take $\alpha_0 = \frac{1}{3}$ and $\tau = 1$.)

When $k = \alpha_0 n$, Equation (73) becomes

$$[z^n]H^k(z) = \frac{\alpha_0}{2i\pi}\int_\Gamma G(z)\exp\left(nK(z)\right)dz, \tag{76}$$

where the kernel K reduces to $K(z) := \log\left((\phi/z)\psi^{\alpha_0}\right)$. By assumption, the quantity e^K has a double saddle point at τ sometimes called a "monkey saddle", *viz.*, a saddle with places for two legs *and* a tail. The idea consists in choosing a contour that is no longer a circle centred at the origin, but, rather, approaches the real axis at an angle (see Fig. 4, middle).

Global analysis. Let δ° be a small enough but fixed positive quantity (here, $\delta^\circ = 1/10$ proves adequate). Specifically, the integration path Γ consists of the following parts: (i) two (small) segments $\Delta_1^\circ, \Delta_2^\circ$ that have length δ° and intersect at τ, at an angle of $\pm 2\pi/3$; (ii) the part Γ° of a circle centred at 0 from which a small arc is taken out, joining with the nonreal ends of $\Delta_1^\circ, \Delta_2^\circ$.

By having chosen δ° small enough, we ensure that e^K decreases strictly in modulus along $\Delta_1^\circ, \Delta_2^\circ$, when going away from τ. By examining the global topography of the real part of $K(z)$ along Γ° (and possibly deforming the contour but keeping it homotopic to Γ° in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ for more complicated cases), we ensure that the modulus of the function e^K remains smaller than its value at the nonreal ends of $\Delta_0^\circ, \Delta_1^\circ$. Consequently, the contribution of the part due to Γ° is exponentially small.

Next, we shall choose a value $\delta < \delta^\circ$ (the "range") depending on n and tending to 0 as $n \to \infty$. With a suitable choice of δ, see (77) below, and by virtue of the decay of $|e^K|$ along the part of the contour at a distance from τ that is larger than δ, the corresponding contribution is also exponentially negligible (roughly like $\exp(-\log^3 n)$). Then, the analysis reduces to a purely local analysis of e^K. We denote by Δ_1, Δ_2 the parts of the contour that are at distance at most δ from τ and adopt a value of δ satisfying two conflicting requirements,

$$n\delta^3 \to \infty, \qquad n\delta^4 \to 0, \quad \text{specifically} \quad \delta = (\log n) n^{-1/3}. \tag{77}$$

Local analysis. We can now switch to the local analysis. The situation is such that there is coincidence of two saddle points (τ, τ'). Accordingly, the kernel K has a double saddle point in τ, meaning that its local expansion is of the cubic type:

$$K(z) = \kappa_0 - \kappa_3 (z-\tau)^3 + O((z-\tau)^4) \qquad (\kappa_0, \kappa_3 > 0).$$

This cubic form together with the fact that κ_3 is positive explains the geometry of the "landscape" corresponding to $|e^K|$, in particular, the level curves, the steepest descent lines, and the steepest ascent lines [**40**]. For example, the steepest descent lines are at angles $0, 2\pi/3, -2\pi/3$ (see Figure 4). Thus, locally at τ, the integration path Γ follows two steepest descent lines of the landscape.

The contribution $I_{1,2}$ along $\Delta_1 \cup \Delta_2$ to the integral in (76) provides the dominant contribution and is estimated next by a local analysis of K for values of z near τ. Set $u = z - \tau$. The condition $n\delta^4 \to 0$ in (77) implies that terms of order 4 and higher do not matter asymptotically, and a simple calculation, using the fact that $G(\tau + u) = -g_1 u + O(u^2)$, yields

$$I_{1,2} := \int_{\Delta_1 \cup \Delta_2} G \cdot \exp(nK)\, dz = -g_1 \exp(\kappa_0)^n \int_{\Delta_1 \cup \Delta_2} u \exp\left(-n\kappa_3 u^3\right) (1 + O(n\delta^4))\, du\,.$$

The rightmost integral taken along $\Delta_1 \cup \Delta_2$ can be extended to two full half lines of angle $\pm 2\pi/3$ emanating from the origin, this at the expense of introducing only exponentially small error terms (since $n\delta^3 \to \infty$). The rescaling $v = u(n\kappa_3)^{1/3} \exp(2i\pi/3)$ on Δ_1 and $v = u(n\kappa_3)^{1/3} \exp(-2i\pi/3)$ on Δ_2 then shows that the completed integral equals

$$(n\kappa_3)^{-2/3} (e^{4i\pi/3} - e^{-4i\pi/3}) \int_0^{+\infty} v \exp(-v^3) dv = -(n\kappa_3)^{-2/3} \frac{i}{\sqrt{3}} \Gamma(2/3),$$

where the evaluation results from a cubic change of variable. In summary, we have found, with I_0 the (negligible) contribution due to the part $\Gamma \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ of the contour,

$$[z^n]H^k(z) = \frac{\alpha_0}{2i\pi}\left(I_0 + I_{1,2}\right) = \frac{g_1}{\kappa_3^{2/3}}\frac{\Gamma(2/3)}{2\pi\sqrt{3}}\frac{\exp(\kappa_0)^n}{n^{2/3}}\left(1 + O(n\delta^4)\right).$$

The definition of the kernel K implies that g_1, κ_0 and κ_3 are expressible in terms of ϕ, ψ, and τ alone,

$$g_1 = \frac{\psi''(\tau)}{\psi(\tau)}, \quad \kappa_0 = \log\left(\frac{\phi(\tau)}{\tau}\psi^{\alpha_0}(\tau)\right), \quad \kappa_3 = 6\left(\frac{d^3}{dz^3}\frac{\phi(z)}{z}\psi_0^{\alpha}(z)\right)_{z=\tau},$$

which leads to

$$[z^n]H^k(z) = \frac{g_1}{\kappa_3^{2/3}}\frac{\Gamma(2/3)}{2\pi\sqrt{3}}\frac{\rho^{-n}\psi(\tau)^k}{n^{2/3}}\left(1 + O(n^{-1/3}(\log n)^4)\right). \tag{78}$$

By the the asymptotic forms (67), (70) of M_n, C_k, the last estimate renormalizes to give the probability of core size at $k = \alpha_0 n$:

$$\text{Prob}\,(X_n = k) = \frac{C_k\,[z^n]H^k(z)}{M_n} = \frac{c_{3/2}}{m_{3/2}}\frac{g_1}{\kappa_3^{2/3}}\frac{\Gamma(2/3)}{2\pi\sqrt{3}}n^{-2/3}\left(1 + O(n^{-1/3}(\log n)^4)\right). \tag{79}$$

For nonseparable cores of general maps, one has $e^{K(z)} = (1+z)^2(z(z-3)^2)^{1/3}/z$, $\tau = 1$, $\kappa_3 = 1/6$ and $g_1 = 3/2$ and the theorem follows as a specialization of Equation (79). ☐

A similar reasoning proves that the estimate remains valid for $n = 3k + e$ with e constant, and more generally for any e that does not grow "too fast" (in fact, $e = o(n^{2/3})$). It is interesting to contrast our approach with that of [**20**]: there, the authors use a circle centred at the origin that passes though the double saddle point; in other words, because the saddle point is double, the contour adopted in [**20**] is a stationary phase contour that does not benefit of strong concentration properties; accordingly the proof in [**20**] needs to appeal to estimates of oscillating integrals based on the method of Van der Corput, but the situation seems less favourable for deriving good error bounds. As we see next, our approach extends rather easily to a complete analysis in the central region.

2.3. Nearby saddles. When k is close to $\alpha_0 n$, we choose in the representation (73) an integration contour Γ that catches *simultaneously* the contributions of the two saddle points τ' and τ. For this purpose, we adopt a contour that goes through the mid-point, $\zeta := (\tau' + \tau)/2$, and, like in the previous case, meets the positive real line at an angle of $\pm 2\pi/3$. Local estimates of the integrand, once suitably normalized, lead to a complex integral representation that eventually reduces to Airy functions.

Theorem 3 (Local limit law and nearby saddles). *The probability distribution of core-size admits a local limit law of the Airy type in the following sense: for any real numbers a, b, one has, as $n \to \infty$,*

$$\eta_n := \sup_{a \le \frac{k-\alpha_0 n}{n^{2/3}} \le b}\left|n^{2/3}\text{Prob}(X_n = k) - p_\ell\, c\mathcal{A}\left(c\frac{k-\alpha_0 n}{n^{2/3}}\right)\right| \to 0, \tag{80}$$

with $p_\ell = \frac{1}{3}$ and $c = \frac{3}{4}2^{2/3}$.

PROOF. The proof parallels closely the one of Theorem 2. We set $k = \alpha_0 n + xn^{2/3}$ where x lies in a finite interval of the real line. The kernel is now a *perturbation* of the previous one: $K(z) = \log\left((\phi/z)\,\psi^{\alpha_0}\,\psi^{xn^{-1/3}}\right)$.

The contour of integration now comprises two small segments $\Delta_1^\circ, \Delta_2^\circ$ of length δ° meeting in $\zeta = (\tau' + \tau)/2$ at an angle $\pm 2\pi/3$ with the positive axis, completed by the arc of a circle simply encircling the origin. The quantity δ° is chosen like before and, for asymptotic purposes, we need only consider subparts Δ_1, Δ_2 of $\Delta_1^\circ, \Delta_2^\circ$ that have length $\delta = (\log n)\, n^{-1/3}$ satisfying (77) above.

We estimate the contribution $I_{1,2}$ arising from $\Delta_1 \cup \Delta_2$, which is the significant part of the contour. The distance between the two saddle points τ, τ' is $O(n^{-1/3})$ which represents the geometric "scale" of the problem. One thus sets $z = \zeta + u$ (with $|u| < n^{-1/3}\log n$). In the neighbourhood of ζ, local expansions of K and G are somewhat more complicated and are then best checked (with suitable monitoring) by a computer algebra system like `Maple`. The computation relies on the assumption $x = O(1)$, but some care in performing expansions is required because of the relations (77), namely $n\delta^3 \to \infty$ and $n\delta^4 \to 0$.

The local expansions of the functions $G(\zeta + u)$ and $K(\zeta + u)$ for x bounded and small u are found to be

$$\begin{aligned} K(\zeta+u) &= \kappa_0 - \kappa_0' x n^{-1/3} - \kappa_0'' x^3 n^{-1} + \kappa_1 x^2 u n^{-2/3} - \kappa_3 u^3 + O(n^{-4/3}\log^4 n)\,, \\ G(\zeta+u) &= g_0 x n^{-1/3} - g_1 u + O(n^{-2/3}\log^2 n). \end{aligned}$$

There $\kappa_0, \kappa_0', \kappa_0'', \kappa_1, \kappa_3, g_0, g_1$ are computable positive numbers and the error terms are valid for $u \in \Delta_1 \cup \Delta_2$. The change of variable $u = vn^{-1/3}$ gives

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= n^{-1/3} \int \left((g_0 x - g_1 v) n^{-1/3} + \epsilon_1\right) e^{\kappa_0 n - \kappa_0' x n^{2/3} - \kappa_0'' x^3 + \kappa_1 x^2 v - \kappa_3 v^3 + \epsilon_2}\, dv \\ &= \exp(\kappa_0)^n\, n^{-2/3} \int \left((g_0 x - g_1 v) + n^{1/3}\epsilon_1\right) e^{-\kappa_0'' x^3 + \kappa_1 x^2 v - \kappa_3 v^3} e^{\epsilon_2}\, dv \\ &= \exp(\kappa_0)^n\, n^{-2/3} \int (g_0 x - g_1 v) e^{-\kappa_0'' x^3 + \kappa_1 x^2 v - \kappa_3 v^3}\, dv\ (1 + O(\epsilon_2)). \end{aligned}$$

By convention, the variables ϵ_1 and ϵ_2 generically denote error terms that satisfy $\epsilon_1 = O\left(n^{-2/3}(\log n)^2\right)$ and $\epsilon_2 = O\left(n^{-1/3}(\log n)^4\right)$, and are uniform in x and n; integration takes place over the union of two segments Δ_1', Δ_2' each of length $\delta n^{1/3} = \log n$. Perform finally the change of variable $v = bt$ (with $b = (3\kappa_3)^{-1/3}$) and complete (introducing a negligible error) the integration path to $e^{\pm 2i\pi/3}\infty$:

$$\begin{aligned} [z^n]H(z)^k &= \frac{\exp(\kappa_0)^n}{2i\pi n^{2/3}} b^2 g_1 \int_{\infty e^{-2i\pi/3}}^{\infty e^{2i\pi/3}} \left(\frac{g_0}{w g_1} x - t\right) e^{-\kappa_0'' x^3 + \kappa_1 x^2 b t - \frac{t^3}{3}}\, dt\ (1 + \epsilon_2) \\ &= \exp(\kappa_0)^n\, n^{-2/3} c\mathcal{A}(cx)(1 + \epsilon_2). \end{aligned}$$

The reduction to $\mathrm{Ai}(x)$ and $\mathrm{Ai}'(x)$ is achieved by an integral representation equivalent to Definition 45 (see Appendix B for details). The Airy density function $\mathcal{A}$ involves the scaling factor $c = bg_1$ (also: $\kappa_0'' = \frac{2}{3}c^3$, $\kappa_1 b = c^2$, $\frac{g_0}{bg_1} = c$). In summary, for $x = O(1)$ and $k = \alpha_0 n + xn^{2/3}$, the main estimate found is

$$[z^n]H^k(z) = \frac{k}{n}\rho^{-n}\,\psi(\tau)^k\, n^{-2/3} c\mathcal{A}(cx)\left(1 + O(n^{-1/3}(\log n)^4)\right), \tag{81}$$

which gives eventually

$$\text{Prob}(X_n = k) = n^{-2/3} p_\ell \, c\mathcal{A}(cx) \left(1 + O(n^{-1/3}(\log n)^4)\right) \tag{82}$$

For nonseparable cores of general maps, one finds $p_\ell = \frac{1}{3}$, $c = \frac{3}{4}2^{2/3}$, and the statement follows. ☐

Theorem 3 together with the companion Theorem 7 below answer precisely a conjecture of Bender *et al.* in [**20**, p. 274], where the authors say (notations adjusted): *"we believe that for* $|k - \alpha_0 n| = xn^{2/3}$ *the probability is asymptotic to [some function]* $\beta(x)n^{-2/3}$*."*

The quantity η_n in (80) measures the "speed of convergence" of the discrete distributions of X_n to the Airy density limit. This speed is dictated by the error term ϵ_2 above, so that one has

$$\eta_n = O\left(n^{-1/3}(\log n)^4\right).$$

This error term can be improved to $O(n^{-1/3})$ provided expansions are pushed to the next order, and a complete asymptotic expansion could even be derived. We do not continue in this direction but turn instead to the analysis of coalescent saddle points that gives access to a wide region of k values—this however at the expense of a somewhat increased technical complexity.

Remark. The situation encountered with maps resorts to a general discussion of coefficients of the form

$$[z^n]\, \psi(z)^k \phi(z)^n$$

(with the possible addition of cofactors), this in critical regions where the basic saddle point method breaks down. The case of maps leads to coalescence between a fixed saddle point and a movable one, but other situations could be similarly dealt with[4]. Equivalently, the problem can be rephrased as one of estimating coefficients of trivariate rational functions,

$$[u^m v^k z^n] \, \frac{1}{(1 - u\phi(z))(1 - v\psi(z))}.$$

Under suitable conditions, an Airy phenomenon must take place when $m \approx n$ and $k \approx \alpha_0 n$. Pemantle [**102**] has launched an ambitious research programme that aims at relating asymptotic coefficient estimates to geometric properties of singular varieties and it would be of obvious interest to relate the present study to Pemantle's results. At least, our results indicate that Airy phenomena and, more generally, stable laws of rational index must be present in certain critical problems of multivariate asymptotic analysis.

3. Coalescing saddles

In the present section, we provide a uniform description of the transition regions around $n/3$, allowing k to vary in a wide region between $o(n)$ and $n - o(n)$. To this purpose, we set

$$k = \alpha_0 n + \beta n = (1/3 + \beta)n,$$

with estimates valid uniformly for β in any compact subinterval of $]-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.

[4]Regarding the estimate at the centre, if at τ the cofactor G has a zero of order p and the kernel K has a saddle point of multiplicity q, then a factor $\Gamma(\frac{p+1}{q+1})$ should replace $\Gamma(\frac{2}{3})$. More generally, functions akin to stable laws (defined in Appendix 7.1) of rational index are expected in the central region. We are however not aware at the moment of any natural combinatorial example involving saddle points of multiplicity larger than 2.

Theorem 4 (Wide region and coalescent saddles). *Let* $k = (1/3+\beta)n$ *for* β *in any compact subinterval of* $]-\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$. *Then,* $\mathrm{Prob}(X_n = \lfloor n/3+\beta n\rfloor)$ *equals*

$$\frac{1}{3(1+3\beta)^{3/2}n^{2/3}}\left(\frac{a_1}{2}\mathcal{A}(n^{1/3}\xi) + \frac{a_4}{n^{2/3}}\exp\left(-\frac{2}{3}n\xi^3\right)\mathrm{Ai}(n^{2/3}\xi^2)\right)(1+O(1/n)), \tag{83}$$

where the quantities ξ, a_1, *and* a_4 *depend only on* β *(we set* $\mathrm{L}(x) = x\log x$*):*

$$\xi = \left(\frac{3}{2}\mathrm{L}(1+3\beta/2) + \frac{1}{2}\mathrm{L}(1-3\beta/2) - \frac{1}{2}\mathrm{L}(1+3\beta)\right)^{1/3}, \tag{84}$$

$$\frac{a_1}{2} = \frac{3}{4}\left(\frac{3\beta/\xi}{(1-9\beta^2/4)(1+3\beta)}\right)^{1/2} \quad \text{and} \quad a_4 = \frac{2}{9\beta^2}\sqrt{\frac{3\xi}{\beta}} - \frac{a_1}{4\xi^2}. \tag{85}$$

The error term of (83) is uniform for β *in any compact subinterval of* $]-\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$.

The estimates involve Airy functions composed with the quantity $n^{1/3}\xi$ that depends nonlinearly on β. In particular, Formula (83) extends the estimates of Section 2.3 when $k = n/3 + xn^{2/3}$, since in that case $\beta \to 0$ while $n^{1/3}\xi$ is proportional to x, and the following approximations apply as $\beta \to 0$:

$$\frac{a_1}{2} = \frac{3}{4}2^{2/3}(1-5\beta/4) + O(\beta),\ a_4 = -\frac{3}{8}2^{1/3} + O(\beta),\ \xi = \frac{3}{4}2^{2/3}(\beta-\beta^2/2) + O(\beta^3).$$

This results in the following second order approximation, which is uniform in the central region $x = O(1)$ and refines Theorem 3: with $c = \frac{3}{4}2^{2/3}$,

$$\mathrm{Prob}(X_n = \lfloor n/3 + xn^{2/3}\rfloor) = \frac{c\mathcal{A}(cx)}{3n^{2/3}}\cdot\left(1 - \left(\tfrac{13}{4} - \tfrac{cx}{2}\tfrac{\mathcal{A}'(cx)}{\mathcal{A}(cx)}\right)x\,n^{-1/3} + O(n^{-2/3})\right). \tag{86}$$

As soon as k leaves the $n/3 \pm O(n^{2/3})$ region, the two Airy terms in (83) start interfering and large deviations are then precisely quantified by (83). When k drifts away to the left of $n/3$ (and $n^{1/3}\xi \to -\infty$), basic asymptotics of Airy functions show that the formula simplifies to agree with the results of Section 2.1.

Proof. The transition phenomenon to be described is the coalescence of two simple saddle points into a double one. We follow the book of Bleistein and Handelsman [**21**, Sec. 9.2], where the method originally due to Chester, Friedman, and Ursell is exposed (see also [**128**]). The simplest occurrence of the phenomenon appears in the integration of $\exp(nf(t))$ with a cubic function f,

$$f(t) = \frac{t^3}{3} - \xi^2 t + r.$$

Indeed, in this case there are two saddle points $+\xi$ and $-\xi$ (given by $f'(t) = t^2 - \xi^2$), coalescing into a double saddle point as $\xi \to 0$. The landscape of $\Re(f(t))$ is represented on Figure 6 for $\xi = 1$ and $\xi = 0$. As expected, this landscape around $t = 0$ is very similar to the ones of Figure 4 near $z = 1$. The strategy consists in performing a change of variable in order to reduce the original problem (73) to this purely cubic case. Denote the kernel of the integral as $K(z) = \log(\psi^{k/n}\phi/z)$, with $k = (1/3+\beta)n$ and the dependency on β kept implicit. The integral in (73) is

$$I(n,\beta) = \int_\Gamma G(z)\exp(nK(z))dz,$$

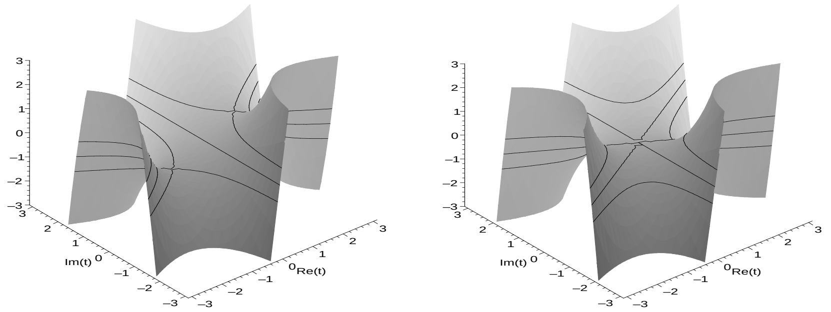


Figure 6: The landscape of $\Re(f(t))$ for $\xi = 1$ and $\xi = 0$.

where Γ is any contour that simply encircles the origin. In accordance with the discussion above, we seek a change of variable of the form

$$K(z) = -\left(t^3/3 - \xi^2 t\right) + r. \tag{87}$$

The parameters $\xi = \xi(\beta)$ and $r = r(\beta)$ must be chosen in order to map one landscape onto the other and in particular τ and τ' onto $+\xi$ and $-\xi$ respectively. This leads to the conditions

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}[K(\tau) + K(\tau')] = K(\tau) - \frac{2}{3}\xi^3 = \log(\psi(\tau)^{k/n}/\rho) - \frac{2}{3}\xi^3 \\ \xi^3 &= \frac{3}{4}[K(\tau) - K(\tau')]. \end{aligned} \tag{88}$$

There are three possibilities for ξ and we choose the real cubic root. In view of the values of K, ϕ and ψ, this leads to the definition (84).

The change of variable must satisfy (87) and map τ and τ' onto ξ and $-\xi$ respectively. In fact there exists a unique mapping $z \to t$ of this type that is conformal and sends the disc D of diameter $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ to a domain D_β. Moreover, for β in $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$, the image D_β contains the disc D' of diameter $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. In other words, it is possible to choose consistently for each z in D, an image t among the three branches allowed by (87). As illustrated by Figure 7, this mapping is very close to the linear mapping that sends τ and τ' onto ξ and $-\xi$.

The existence of this conformal mapping is proven in Appendix 7.3. Let $z(t)$ be the inverse mapping and $G_0(t) = G(z(t))\dot{z}(t)$ where $\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}$. Remark that $G_0(t)$ is analytic in D', since the change of variable is conformal and $G(z)$ is analytic in D.

Next, we make the contour Γ precise and simultaneouly proceed with the estimation the integral. As is usual with saddle point integrals, we first need to localise the integral in D, neglecting the parts of the path down in valleys,

$$I(n, \beta) = \int_\Gamma G(z)\exp(nK(z))\,dz = \int_{\Gamma\cap D} G(z)\exp(nK(z))\,dz + \epsilon_1.$$

The geometry of the landscape immediately implies that the portion $\Gamma \setminus D$ of Γ can be chosen so as to wind about the origin while lying entirely in valleys, and we fix such choice once and for all. Consequently, the integral on $\Gamma \setminus D$ is bounded by the values at its endpoints, themselves fixed to be at $z = \tau_d + e^{\pm 2i\pi/3}$, with τ_d the dominant saddle point (the one closest to the origin). The error term then satisfies $\epsilon_1 = O(c^n)I(n, \beta)$ for some $0 < c < 1$, *i.e.*, it is exponentially negligible.

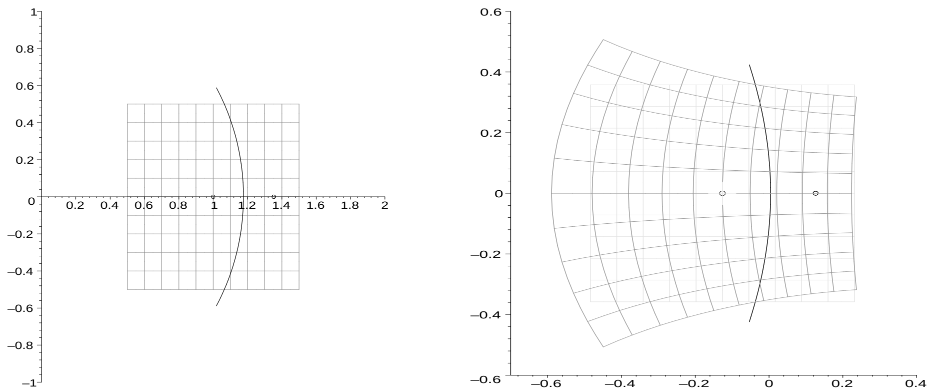


Figure 7: The conformal mapping $z \to t$ for $\beta = -1/10$: (i) A grid in the z-plane and a part of the path Γ; (ii) the corresponding images in the t-space.

Inside the disc D we apply the change of variable (87), then restrict attention to the disc D', and deform the contour $\gamma \cap D$ into the relevant finite part of $\Delta_\infty = \{te^{\pm\frac{2i\pi}{3}}, t \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} I(n,\beta) &= \int_{\Gamma_\beta \cap D_\beta} G(z(t)) \exp(nf(t)) \dot{z}(t)\, dt + \epsilon_1 \\ &= \int_{\Delta_\infty \cap D'} G_0(t) \exp(nf(t))\, dt + \epsilon_2. \end{aligned}$$

As each end point is moved between two locations low in the valleys, the second error term ϵ_2 is again exponentially negligible.

In order to evaluate the last integral one needs to dispose of the cofactor $G_0(t)$. This is done via an integration by part. Since $G_0(\xi) = 0$ and G_0 is regular, taking $a_1 = G_0(-\xi)/(2\xi)$ leads to

$$G_0(t) = (\xi - t)a_1 + (t^2 - \xi^2)H_0(t),$$

where $H_0(t)$ is regular in D'. The expression (85) for a_1 follows from this definition using the value of $\dot{z}(-\xi)$ as computed in Appendix 7.3. The integral $I(n,\beta)$ is then

$$I(n,\beta) \quad = \quad \exp(nr) \int_{\Delta_\infty \cap D'} (\xi - t)a_1 \exp\left(-n\left(t^3/3 - \xi^2 t\right)\right)\, dt + R_0,$$

where after integration by part, and up to another exponentially negligible term,

$$R_0 \quad = \quad \frac{\exp(nr)}{n} \int_{\Delta_\infty \cap D'} H_0'(t) \exp\left(-n\left(t^3/3 - \xi^2 t\right)\right) dt + \epsilon_3.$$

The integration by part has reduced the order of magnitude by a factor n, but because of the cancellation $G_0(\xi) = 0$, this second order term might interfere. Fortunately, R_0 is amenable to the same treatment as $I(n,\beta)$. Iterating the integration by part could lead to a complete expansion of $I(n,\beta)$ but we shall content ourselves with the next term, in which no further cancellation occurs. Set $H_0'(t) = a_2\xi + a_3 t + (t^2 - \xi^2)H_1(t)$, with $H_1(t)$ regular in D', and a_2,

a_3 functions of β; we have

$$I(n,\beta) = \exp(nr) \int_{\Delta_\infty} \left(\xi \left(a_1 + \frac{a_2}{n} \right) - t \left(a_1 - \frac{a_3}{n} \right) \right) \exp\left(-n\left(t^3/3 - \xi^2 t\right)\right) dt + R_1.$$

where the integral has been extended to the whole of Δ_∞ at the expense of yet another exponentially negligible term. The error term is

$$R_1 = \frac{\exp(nr)}{n^2} \int_{\Delta_\infty \cap D'} H_1'(t) \exp\left(-n\left(t^3/3 - \xi^2 t\right)\right) dt + \epsilon_4.$$

In terms of the Airy function, we thus have directly

$$I(n,\beta) = 2i\pi \frac{\exp(nr)}{n^{2/3}} \left(\xi n^{1/3} \left(a_1 + \frac{a_2}{n} \right) \mathrm{Ai}(n^{2/3}\xi^2) - \left(a_1 - \frac{a_3}{n} \right) \mathrm{Ai}'(n^{2/3}\xi^2) \right) + R_1,$$

and the error term R_1 can be estimated: following [**21**, p. 375], there exist d_0 and d_1 positive such that

$$|R_1| \leq \frac{\exp(nr)}{n^2} \left(\frac{d_0}{n^{1/3}} |\mathrm{Ai}(n^{2/3}\xi^2)| + \frac{d_1}{n^{2/3}} |\mathrm{Ai}'(n^{2/3}\xi^2)| \right).$$

The theorem follows from formulae (73), (67), (70), (88) and the definition of the map–Airy law, upon setting $a_4 = (a_2 + a_3)\xi$. □

4. Singularity Analysis of the Composition Schema

There are two aspects to the enumeration of maps. One aspect relies on what we have called the "Lagrangean framework", and has been treated accordingly by suitable adaptations of the saddle point method. The other one employed by Gao and Wormald in [**76**] is further developed now: it exploits directly the fact that map generating functions like M, C, H each have a unique dominant singularity that is isolated and involves the singular exponent $\frac{3}{2}$. In this section, we provide an analysis of the probability law arising from *any* functional composition schema of singular exponent 3/2 under the "criticality" assumption already encountered in Section 1.3; the abstract conditions are (89), (92), and (93) below. (Other non-critical cases turn out to be in fact simpler and are already known from [**17, 71, 114**] and related works.) We establish that the "map–Airy" distribution is due to appear systematically in such contexts. Technically, this section bases itself on the principles of Flajolet and Odlyzko's singularity analysis method [**66, 101**] and constitutes an alternative to the method of coalescing saddles.

As we aim at analysing combinatorial generating functions, we restrict attention in what follows to functions with *nonnegative coefficients* at 0. First, a function F analytic at 0 with radius of convergence r_F is said to be *singular with exponent* $\frac{3}{2}$ if the following conditions hold:

$$(89) \quad \begin{cases} F(z) \text{ is analytic on } |z| = r_F,\ z \neq r_F; \\ F(z) \text{ is continuable in } \Delta := \left\{ z \;\middle|\; |z| < R_F,\ z \notin [r_F, R_F] \right\}; \\ F(z) = f_0 - f_1(1 - z/r_F) + f_{3/2}(1 - z/r_F)^{3/2} + O((1 - z/r_F)^2) \text{ as } z \to r_F \text{ in } \Delta. \end{cases}$$

There, $f_0, f_1, f_{3/2}$ are positive constants and R_F is some constant satisfying $R_F > r_F$. This fact, by virtue of singularity analysis, entails

$$(90) \qquad [z^n]F(z) \sim \frac{3}{4} \frac{f_{3/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{r_F^{-n}}{n^{5/2}}$$

Next, as seen in Section 1, the equations describing core size are of the composition type. Given generating functions with nonnegative coefficients, C and H, we consider in the abstract the functional *composition schema*

$$M(z,u) = C(uH(z))$$

and the associated family of probability distributions

$$\text{(91)} \qquad \operatorname{Prob}(X_n = k) = \frac{C_k}{M_n}\,[z^n]H(z)^k, \qquad C_k := [z^k]C(z), \quad M_n := [z^n]M(z,1).$$

Combinatorially, this corresponds to a composition $\mathcal{M} = \mathcal{C} \circ \mathcal{H}$ between classes of objects, where objects of type $\mathcal{H}$ are substituted freely at individual "atoms" (*e.g.*, nodes, edges, or faces) of elements of $\mathcal{C}$. The bivariate generating function is such that $[z^n u^k]M(z,u)$ gives the number of $\mathcal{M}$–objects of total size n whose $\mathcal{C}$–component (the "core") has size k and X_n is the corresponding random variable describing core-size in this general context. We then define the composition schema $C(uH(z))$ to be of *singular type* $(\frac{3}{2} \circ \frac{3}{2})$ by the condition

$$\text{(92)} \qquad C(z), H(z) \text{ have singular exponent } \tfrac{3}{2} \text{ in the sense of (89).}$$

In addition, the composition schema is said to be *critical* if there is exact coincidence between the singular value of H and the singularity of C:

$$\text{(93)} \qquad H(r_H) = r_C.$$

(Criticality is satisfied in all composition schemas of maps examined in this paper.)

Here come a few basic observations on the "physics" of the counting problem. We denote the radii of convergence of C and H by $r_C = \sigma$ and $r_H = \rho$, and impose the condition $H(\rho) = \sigma$ expressing criticality (93). The local expansions are assumed to conform to (89):

$$\text{(94)} \qquad \begin{array}{rclclclcl} H(z) & = & \sigma & - & h_1(1-z/\rho) & + & h_{3/2}(1-z/\rho)^{3/2} & + & O((1-z/\rho)^2) \\ C(z) & = & c_0 & - & c_1(1-z/\sigma) & + & c_{3/2}(1-z/\sigma)^{3/2} & + & O((1-z/\sigma)^2). \end{array}$$

First, straight singularity analysis (see (89)) provides the asymptotic counts

$$\begin{aligned} &H_n \equiv [z^n]H(z) \sim \frac{3h_{3/2}}{4\sqrt{\pi n^5}}\rho^{-n}, \quad C_k \equiv [z^k]C(z) \sim \frac{3c_{3/2}}{4\sqrt{\pi k^5}}\sigma^{-k}, \\ &M_n \equiv [z^n]M(z,1) \sim \frac{3m_{3/2}}{4\sqrt{\pi n^5}}\rho^{-n}, \qquad \text{where} \quad m_{3/2} := c_1\, h_{3/2}/\sigma + c_{3/2}(h_1/\sigma)^{3/2}. \end{aligned}$$

Also, from the definition (91) of the distribution of core size X_n and the fact that any $C(z)^k$ has itself a singular expansion of exponent $\frac{3}{2}$, there results that

$$\text{(95)} \qquad \operatorname{Prob}(X_n = k) \sim \frac{h_{3/2}}{m_{3/2}} k\,\sigma^{k-1} C_k,$$

for any *fixed* k. Thus, for bounded values of k, the probability decays initially roughly like

$$\text{(96)} \qquad \frac{3h_{3/2}\,c_{3/2}}{4m_{3/2}\,\sigma\sqrt{\pi}} k^{-3/2},$$

(as proved below, this estimate as $k \to \infty$ remains in fact valid as long as $k = o(n)$) and the $O(1)$ region of k contributes a total mass of about

$$\text{(97)} \qquad p_s := c_1 h_{3/2}/(\sigma m_{3/2}).$$

Finally, the expectation of core size in a random $\mathcal{M}$–structure of size n is found by similar means to satisfy

$$E(X_n) = \frac{1}{M_n}[z^n]\left(\frac{\partial}{\partial u}C(uH(z))\right)_{u=1} \sim \left(\frac{c_{3/2}}{m_{3/2}}(h_1/\sigma)^{1/2}\right)\cdot n. \tag{98}$$

What is unusual is that the mean of X_n is $O(n)$, while the distribution assigns a fraction of the probability mass near the origin.

Theorem 5 (Composition Schema ($3/2\circ 3/2$)). *Consider a critical combinatorial schema $\mathcal{M} := \mathcal{C}\circ\mathcal{H}$ of type $(\frac{3}{2}\circ\frac{3}{2})$, with parameters as specified in* (94)*. The distribution of core size of a random element in $\mathcal{M}$ with size n has three asymptotic regimes depending on the value of k/n in comparison to*

$$\alpha_0 := \sigma/h_1.$$

(*i*) *For $k=\alpha n$, with $0<\alpha<\alpha_0$, the* left tail *is polynomially small:*

$$\text{Prob}(X_n = k) \ \sim\ \frac{3h_{3/2}\,c_{3/2}}{4m_{3/2}\,\sigma\sqrt{\pi}}\,(1-\alpha/\alpha_0)^{-5/2}\,k^{-3/2}\,.$$

(*ii*) *In the* central region *$k=\alpha_0 n + xn^{2/3}$ with $x=O(1)$, an Airy law holds:*

$$n^{2/3}\text{Prob}(X_n = \alpha_0 n + xn^{2/3}) \ \sim\ \alpha_0^{-3/2}\frac{c_{3/2}}{m_{3/2}}\,c\mathcal{A}(cx) \qquad \textit{where } c = \frac{1}{\alpha_0}\left(\frac{h_1}{3h_{3/2}}\right)^{2/3}.$$

(*iii*) *For $k=\alpha n$, with $\alpha>\alpha_0$, the* right tail *is exponentially small:*

$$\text{Prob}(X_n = k) = O(A^k) \qquad \textit{for some } A\equiv A(\alpha),\ 0<A<1.$$

Proof. The analysis[5] reduces to estimating coefficients of large powers of $H(z)$ and the starting point is Cauchy's coefficient formula

$$[z^n]H(z)^k = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma H(z)^k\frac{dz}{z^{n+1}} \tag{99}$$

now evaluated directly without reference to any parametrization. Contours corresponding to the three cases are depicted in Figure 8.

Common to cases (*i*) and (*ii*), we choose the contour γ as being composed of an arc of some circle of radius $R>\rho$ connected to a loop around $[\rho, R]$. The open loop approaches ρ at an angle $-\phi$ (where ϕ has to be strictly less than $\pi/2$) then winds around ρ while staying at a distance from ρ chosen to be n^{-r}, and then continues at an angle ϕ from the positive axis. (We shall take $\phi=0$ and $r=1$ for the left tail, $\phi=\pi/3$ and $r=2/3$ for the central region.)

A technical point must be noted before we can proceed. Let D_R be the disk of radius R centred at 0. In what follows, we analyse large powers of $h(z)=H(z)^\alpha/z$ in parts of some D_R. Since $H(z)$ has nonnegative coefficients and a unique dominant singularity, along any circle centred at 0, it attains its maximum modulus uniquely on the positive real axis but this property does not necessarily hold *outside* of the disk of convergence $|z|=\rho$. However, if any fixed neighbourhood V of ρ is excluded, one can still ensure that $|H(z)|<H(\rho)$ and $|h(z)|<h(\rho)$ for $z\in D_R\setminus V$. In the analysis described below, we also make use of local expansions near ρ and base the analysis on the fact that $|h(z)|$ decreases locally away from ρ along certain directions in a neighbourhood V of ρ. Again, this need not hold *globally*, but,

[5]To keep this section short, we only indicate the major analytic steps and do not attempt to make error terms systematically explicit or uniform (see however Figure 9 for indications). Details can be easily supplied by reference to the singularity analysis paper [**66**] as the approach is somewhat similar.

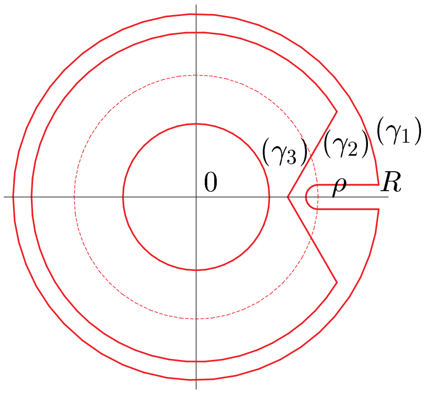


Figure 8: The three contours $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ corresponding to the three regimes of the distribution of core size (left tail, centre, right tail, resp.).

by having restricted V suitably, we can always assume that this decrease holds throughout V. In what follows the contours γ that we choose are implicitly taken inside domains D_R, V that satisfy these requirements. In this way, we ensure two properties: (a) the contribution to (99) that is due to the arc of the larger circle is exponentially small compared to $\sigma^k \rho^{-n}$; (b) the dominant part of the integral arises from a vicinity of the singularity where local expansions are assumed to be globally valid. In particular, one has for z near ρ in a Δ-domain of the form (89):

$$(100) \qquad h(z) \equiv \frac{H(z)^\alpha}{z} = \frac{\sigma^\alpha}{\rho}\left(1 + \left(1 - \frac{h_1\,\alpha}{\sigma}\right) Z + \frac{h_{3/2}\alpha}{\sigma} Z^{3/2} + O(Z^2)\right), \qquad Z := 1 - \frac{z}{\rho}.$$

(The determinations are the principal ones when $Z > 0$, corresponding to z left of ρ.)

(i) *Left tail.* For this regime, the local expansion (100) shows that the function $h(z) = H(z)^\alpha/z$ decreases when going away from 1 parallel to the real axis since the coefficient of Z is positive when $\alpha < \alpha_0$ and Z has there a negative real part. The contour γ_1 adopted then includes a loop in the z–plane—this is exactly the Hankel contour of singularity analysis—passing at distance $1/n$ from the singularity and oriented positively. Only a small part of the contour, the "range", matters asymptotically. The standard change of variable $z = \rho(1 - t/n)$ is performed and, up to exponentially small terms, only the part $t \le (\log n)^2$ of the contributes. Then the Cauchy kernel z^{-n} becomes, in the limit $n \to \infty$, the exponential kernel e^t multiplied by ρ^{-n}, and the expansion of $H(z)^k$ provides

$$(101) \qquad \frac{H(z)^k}{z^{n+1}}\,dz = \frac{\sigma^k \rho^{-n}}{n} e^{\lambda t}\left(1 + \frac{k h_{3/2}}{\sigma}\frac{t^{3/2}}{n^{3/2}} + O(n^{-1.99})\right) dt, \qquad \lambda := 1 - \frac{h_1}{\sigma}\frac{k}{n}.$$

In the t–plane, the image contour of γ_1 is now completed into a loop γ_1' coming from $-\infty - i$, encircling the origin on the right and going back to $-\infty + i$ (introducing again only exponentially small error terms). In the process, termwise integration of the expansion (101) against the kernel $e^{\lambda t}$ shows that the contribution of the term 1 is negligible (the complete integral

$\int_{\gamma_1'} e^{\lambda t} dt$ is identically 0). One finds in this way that

$$
\begin{aligned}
[z^n]H(z)^k &\sim \frac{\sigma^k \rho^{-n}}{n^{5/2}} \frac{h_{3/2}k}{\sigma} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1'} e^{t(1-\alpha h_1/\sigma)} t^{3/2}\, dt \\
&\sim \frac{\sigma^k \rho^{-n}}{\Gamma(-3/2) n^{5/2}} \frac{h_{3/2}k}{\sigma} (1-\alpha h_1/\sigma)^{-5/2},
\end{aligned}
\tag{102}
$$

where the second line derives from Hankel's original representation of the Gamma function [**126**, Sec. 12.22]:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-s} e^t\, dt.$$

From there, the left-tail estimates (i) result after normalization by

$$\frac{C_k}{M_n} \sim \frac{c_{3/2}}{m_{3/2}} \left(\frac{n}{k}\right)^{5/2} \sigma^{-k} \rho^n. \tag{103}$$

The formula (102) extends (96) provided k tends to infinity more slowly than $\alpha_0 n$, but it introduces a curious distortion factor of $(1-\alpha/\alpha_0)^{-5/2}$. The estimate obviously ceases to be valid when α approaches α_0.

(ii) *Central region.* In this case, we adopt as integration contour in the z–plane a contour γ_2 including a positively oriented "loop" that is made of two rays at an angle of $\pi/3$ and $-\pi/3$ with $(0,+\infty)$; also, the two rays intersect on the real axis left of the singularity, at a distance chosen to equal $\rho n^{-2/3}$.

When $\alpha = k/n$ is exactly at α_0, the term linear in Z disappears from (100). Also, the argument of $Z^{3/2}$ is $\pm\pi$ so that $h(z) = H(z)^\alpha/z$ decreases in modulus when going away from ρ. When k/n is within $O(n^{-1/3})$ from α_0, $|h(z)|$ decreases along the contour away from ρ provided Z is a bit larger than $n^{-2/3}$, say, $Z > n^{-2/3}\log^2 n$ (since, then, the terms involving $Z^{3/2}$ take over the terms linear in Z), and we may neglect the corresponding contribution to the integral as it is exponentially small (roughly like $\exp(-\log^3 n)$).

We perform the normalization $z = \rho(1-t/n^{2/3})$ and, on the significant part of the contour, one has $t \le \log^2 n$. First, an easy calculation shows that, in the range,

$$\frac{H(z)^k}{z^{n+1}}\, dz = -\frac{\sigma^k \rho^{-n}}{n^{2/3}} \exp\left(-\frac{h_1}{\sigma} x t + \frac{h_{3/2}}{h_1} t^{3/2} + O(n^{-0.33})\right) dt. \tag{104}$$

Next, the variable t evolves on a contour made of two segments of angle $2\pi/3$ and $-2\pi/3$, intersecting at -1, and each of length $O(\log^2 n)$. At the expense of exponentially small error terms, this contour can be extended back to infinity. Reverting the orientation and shifting the contour by 1, this results for t in the new contour composed of two infinite rays, and Equation (104) implies

$$[z^n]H(z)^k \sim \frac{\sigma^k \rho^{-n}}{n^{2/3}} \frac{1}{2i\pi} \int_{\infty e^{-2i\pi/3}}^{\infty e^{2i\pi/3}} \exp\left(\frac{h_{3/2}}{h_1} t^{3/2} - \frac{h_1}{\sigma} x t\right) dt\,.$$

The integral representation is one of the basic forms of the Airy distribution (see Appendix 7.2). In summary, we have found a "central" estimate for large powers of H,

$$[z^n]H(z)^k \sim \frac{\sigma^k \rho^{-n}}{n^{2/3}} \frac{\sigma}{h_1} c\mathcal{A}(cx)$$

which, after the normalization (103), gives precisely the Airy density in the central region (*ii*). As a consistency check, note that the total mass concentrated near $\alpha_0 n$ comes out as $1 - p_s$, where p_s is the mass of the "small" k region (97); also the contribution to mean core-size due to the central region is $\sim \alpha_0(1-p_s)n$, which matches asymptotically the direct estimation in (98).

(*iii*) *Right tail.* Without loss of generality, we assume that $H(z)$ is of exact order z at 0 and consider accordingly $\alpha < 1$. Let ζ be any positive number strictly less than the radius of convergence ρ of $H(z)$. Since H has nonnegative coefficients, trivial bounds applied to coefficient integrals entail

$$[z^n]H(z)^k \le \left(\frac{H(\zeta)^\alpha}{\zeta}\right)^n. \tag{105}$$

Let $h(z) = H(z)^\alpha/z$. One has trivially $h'(0^+) = -\infty$ while, at the other end, $h'(\rho) = \frac{\sigma^\alpha}{\rho^2}\left(\alpha\frac{h_1}{\sigma} - 1\right)$, a quantity that is strictly positive precisely when $\alpha > \sigma/h_1$. Thus $h(z)$ is decreasing away from 0 and increasing when z approaches ρ from the left. Consequently, it attains its minimum value at some point $\zeta_0 \in (0,\rho)$ and the inequality $h(\zeta_0) < h(\rho) = \sigma^\alpha/\rho$ holds there. (In fact, the minimum is unique and thus determined by the relations: $h'(\zeta_0) = 0$ and $0 < \zeta_0 < \rho$.) Thus, from the bound (105) taken at $\zeta = \zeta_0$, one finds that $[z^n]H(z)^k \le h(\zeta_0)^n$. Combining this last inequality with the known asymptotic forms of C_k and M_n shows that

$$\operatorname{Prob}(X_n = k) = O\left(\frac{h(\zeta_0)}{h(\rho)}\right)^n,$$

where ζ_0 is a computable function of α. This constitutes the exponentially small estimate of the right tail (*iii*), with $A = h(\zeta_0)/h(\rho)$. The point ζ_0 is in fact a saddle point of the integrand. As is true of coefficients of order n in powers of order n of "most" analytic functions (see *e.g.*, the survey [**77**]), the saddle point method applies. Here, it suffices to take as integration contour the circle of radius ζ_0 that is a saddle-point contour. In this way, the upper bound is easily refined into the asymptotic form $cA^n n^{-1/2}$. □

Closer inspection of the proof reveals that the error terms can be made uniform (see the last line of Figure 9): for the left tail, this requires α to be confined to a closed subinterval of $(0,\alpha_0)$ for the central region, uniformity is granted when x is restricted to any finite interval, which corresponds to $k = \alpha_0 n \pm O(n^{2/3})$.

It is quite striking to watch the interplay between the various regimes analysed and the choice of the corresponding contours. See Figure 9 for a summary, which is to be compared to Figure 5 for the saddle-point approach. As is expected from the general theory [**66**], when k remains $O(1)$, the usual Hankel contour (at distance $1/n$ from ρ) fully captures the singular behaviour of the generating functions (see (95)) and it continues to do so as long as k remains smaller than $\alpha_0 n$. As soon as the central region $k \approx \alpha_0 n$ is approached, the Hankel contour must be moved away from the singularity (at distance $n^{-2/3}$) while being folded back towards the circle of convergence. Finally, when k exceeds $\alpha_0 n$, the contour moves further back (it can be entirely folded within the disk of convergence) passing through a saddle point that is then at distance $O(1)$ from ρ.

	Left tail	Central region	Right Tail
Method:	singularity analysis	this paper	saddle point
Type:	$\int e^t t^{3/2} dt \; \left(\Gamma(-\frac{3}{2})^{-1}\right)$	$\int e^{t^{3/2}-xt} dt \; (\mathrm{Ai}(x^2))$	$\int e^{-t^2} dt \; \left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)$
Angle (ϕ):	± 0	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$
Dist. to sing.:	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^{2/3}}$	$O(1)$
Range:	$\frac{\log^2 n}{n}$	$\frac{\log^2 n}{n^{2/3}}$	$\frac{\log^2 n}{n^{1/2}}$
Error:	$n^{-1/2}$	$n^{-1/3+\epsilon}$	$n^{-1/2}$

Figure 9: Composition of singularities: The methods, types of normalized integrals, contours (angle, distance to singularity), effective ranges, and approximation errors corresponding to the three regimes of the law of core-size.

5. Varieties of maps, largest components, and random sampling

The results obtained in the particular case of nonseparable cores of maps belong to a very general pattern in the physics of random maps. In this section, we first exhibit a dozen classes of maps that resort to the composition schema and the Lagrangean framework (Section 5.1). The analytic properties, in terms of either the associated saddle point geometry or the singularity structure, entirely parallel the treatment given for nonseparable core of general maps. Accordingly, an Airy law of the map type holds for multiconnected cores of several varieties of maps (Theorem 6). Next, in Section 5.2, we follow the lines of earlier works of Bender, Gao, Richmond, and Wormald and "transfer" the estimates of core-size to largest multiconnected components of random maps (Theorem 7). Various consequences for random sampling are given in Section 5.3, and we conclude with simulation results that validate well all our previous analyses (Section 5.4).

5.1. Map related composition schemas. We start with a few definitions of classes of maps that have proved to be of interest in the combinatorial literature.

Families of maps. A map is *loopless* if it does not contain any loop; *bridgeless* if it does not contain any bridge (a bridge, or isthmus, is an edge whose removal disconnects the map); *simple* if it does not contain multiple edges nor loops; *bipartite* if the vertices can be coloured in two colours such that each edge is incident to both colours.

A map is *k-connected*, $k \geq 2$, if it cannot be separated into several connected components by removing $k-1$ vertices. A map is *nonseparable* if it is 2-connected and loopless, with an exception for the two maps with one edge (the bridge and the loop) that are taken to be nonseparable by convention.

A map is a *singular triangulation* if all its faces have degree three (including the outerface); it is a *triangulation* if moreover it is 3-connected (these correspond to the usual geometric triangulations, with straight line triangles and no multiple edges); it is an *irreducible triangulation* if moreover all its cycles of length three bound a face. Observe that 3-connected maps are in one-to-one correspondence with *graphs of convex polyhedra*, and that irreducible triangulations are also called *4-connected maximal planar graphs*.

Table 1 illustrates these definitions by providing for various families the first few terms of their generating functions. We recall that the generating functions are for *rooted* maps. Historical references on the enumeration of these families can be found in [**92**].

Many families of maps have algebraic generating functions, that admit Lagrangean parametrizations of the form (48). Moreover, they normally have a unique dominant singularity and a singular exponent equal to 3/2, with the validity of the singular expansion being as required by Theorem 5. Table 2 illustrates this "universal" phenomenon by providing the parametrizations, dominant singularity and singular expansion for the families of Table 1.

Composition schemas. Table 3 presents some interesting composition schemas relating the previous families. For each line of the table a basic family $\mathcal{M}$ and a core family $\mathcal{C}$ are given, together with four series $M(z)$, $C(z)$, $H(z)$ and $D(z)$. The series $M(z)$ and $C(z)$ are the generating function of the families $\mathcal{M}$ and $\mathcal{C}$ and are given in terms of the series of Table 2. Except for the last line, the composition schema has then the form

$$\mathcal{M} = \mathcal{C} \circ \mathcal{H} + \mathcal{D},$$

meaning that a map of $\mathcal{M}$ either has a core of $\mathcal{C}$ in which some substituands of $\mathcal{H}$ are attached, or has no core. In particular the bivariate generating function of maps with respect to the size of the core is then

$$M(z,u) = C(uH(z)) + D(z).$$

Let us now describe more specifically these schemas. Recall that maps are represented in the plane with the unbounded face on the right of the root; the *inside* of a cycle is then defined with respect to the unbounded face.

- The *loopless core of maps* is obtained by detaching all maximal loops and their interior (maximal means not contained within any other loop). Unless the root is a loop (this case gives $D(z)$), a loopless core is obtained. Conversely, at each of the $2k$

Table 1: A selection of classical families together with their associated generating functions, $M(z) = \sum_{n\geq 1} M_n z^n$, where M_n is the number of maps in $\mathcal{M}$ that have size n.

maps, size $n \geq 1$	generating function (first terms)
$\mathcal{M}_1$ general maps, n edges	$M_1(z) = 2z + 9z^2 + 54z^3 + 378z^4 + 2916z^5$
$\mathcal{M}_2$ bridgeless maps, n edges	$M_2(z) = z + 3z^2 + 13z^3 + 68z^4 + 399z^5$
$\mathcal{M}_2$ loopless maps, n edges	$M_2(z) = z + 3z^2 + 13z^3 + 68z^4 + 399z^5$
$\mathcal{M}_3$ simple maps, n edges	$M_3(z) = z + 2z^2 + 6z^3 + 23z^4 + 103z^5$
$\mathcal{M}_4$ nonseparable maps, n edges	$M_4(z) = 2z + z^2 + 2z^3 + 6z^4 + 22z^5 + 91z^6$
$\mathcal{M}_5$ nonseparable simple maps, n edges	$M_5(z) = z + z^3 + z^4 + 6z^5 + 16z^6 + 71z^7$
$\mathcal{M}_6$ 3-connected maps, $n+1$ edges	$M_6(z) = z^5 + 4z^7 + 6z^8 + 24z^9 + 66z^{10}$
$\mathcal{B}_1$ bipartite maps, n edges	$B_1(z) = z + 3z^2 + 12z^3 + 56z^4 + 288z^5$
$\mathcal{B}_2$ bip. simple maps, n edges	$B_2(z) = z + 2z^2 + 5z^3 + 15z^4 + 52z^5$
$\mathcal{B}_3$ bib. bridgeless maps, n edges	$B_3(z) = z^2 + z^3 + 6z^4 + 16z^5 + 71z^6$
$\mathcal{B}_4$ bip. nonseparable maps, n edges	$B_4(z) = z + z^2 + z^3 + 2z^4 + 6z^5 + 19z^6$
$\mathcal{B}_5$ bip. nonsepar. simple maps, n edges	$B_5(z) = z + z^4 + 3z^6 + 7z^7 + 15z^8 + 63z^9$
$\mathcal{T}_1$ singular triangulations, $n+2$ vert.	$T_1(z) = z + 4z^2 + 24z^3 + 176z^4 + 1456z^5$
$\mathcal{T}_2$ triangulations, $n+3$ vert.	$T_2(z) = z + 3z^2 + 13z^3 + 68z^4 + 399z^5$
$\mathcal{T}_3$ irreducible triangulations, $n+3$ vert.	$T_3(z) = z + z^3 + 3z^4 + 12z^5 + 52z^6 + 241z^7$

corners of a loopless map of size k, a sequence $(1/(1-\star))$ of loops with a map inside $(z(1+M))$ can be attached.

- The *bridgeless core of maps* is obtained by detaching all closest bridges (a bridge is closest if there are no other bridge between it and the root). Unless the root is a bridge a bridgeless core is obtained. Conversely, at each corner of a bridgeless map,

Table 2: Generating functions, parametrizations and singular expansions for the families of Table 1. In this table, $M(z) = \Psi(L(z))$, where $L(z) = z\phi(L(z))$.

$\mathcal{M}$	ϕ	Ψ	$1/\rho$	singular expansion $(Z = 1 - z/\rho)$
$\mathcal{M}_1$	$3(1+y)^2$	$\frac{2y-y^2}{3}$	12	$\frac{1}{3} - \frac{4}{3}Z + \frac{8}{3}Z^{3/2} + O(Z^2)$
$\mathcal{M}_2$	$3(1+\frac{y}{4})^4$	$\frac{y(y^2+3y-9)}{27}$	$\frac{256}{27}$	$\frac{5}{27} - \frac{16}{27}Z + \frac{32\sqrt{6}}{81}Z^{3/2} + O(Z^2)$
$\mathcal{M}_3$	$\frac{(y+3)^2}{3-y}$	$\frac{-y(y^2+3y-9)}{27}$	8	$\frac{5}{27} - \frac{32}{81}Z + \frac{256}{729}Z^{3/2} + O(Z^2)$
$\mathcal{M}_4$	$(1+y)^3$	$\frac{y(2+y-y^2)}{(1+y)^3}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{1}{3} - \frac{4}{9}Z + \frac{8\sqrt{3}}{81}Z^{3/2} + O(Z^2)$
$\mathcal{M}_5$	$\frac{(y+1)^6}{(2y+1)^2}$	$\frac{y(-y^2+y+1)}{(y+1)^3}$	$\frac{729}{128}$	$\frac{5}{27} - \frac{32}{135}Z + \frac{2^8\sqrt{15}}{3^4 5^3}Z^{3/2} + O(Z^2)$
$\mathcal{M}_6$	$\frac{1}{1-y}$	$\frac{y^5(y^2+y-1)}{(1+y)^3(y^2-y-1)}$	4	$\frac{1}{540} - \frac{167}{8100}Z + \frac{32}{729}Z^{3/2} + O(Z^2)$
$\mathcal{B}_1$	$2(1+y)^2$	$\frac{y(2-y)}{4}$	8	$\frac{1}{4} - Z + 2Z^{3/2} + O(Z^2)$
$\mathcal{B}_2$	$\frac{8(1+y)^2}{4+2y-y^2}$	$\frac{y(2-y)}{4}$	$\frac{32}{5}$	$\frac{1}{4} - \frac{5}{9}Z + \frac{50\sqrt{5}}{243}Z^{3/2} + O(Z^2)$
$\mathcal{B}_3$	$\frac{(y+2)^6}{32(1+y)^2}$	$\frac{y^2(8-4y^2+4y-y^3)}{32(1+y)^2}$	$\frac{729}{128}$	$\frac{7}{128} - \frac{189}{640}Z + \frac{18\sqrt{15}}{125}Z^{3/2} + O(Z^2)$
$\mathcal{B}_4$	$\frac{32(1+y)^2}{(y^2-2y-4)^2}$	$\frac{y(2-y)}{4}$	$\frac{128}{25}$	$\frac{1}{4} - \frac{5}{13}Z + \frac{50}{2197}Z^{3/2} + O(Z^2)$
$\mathcal{B}_5$	$\frac{128(1+y)^2}{(4+2y-y^2)^3}$	$\frac{y(y-2)}{4}$	$\frac{512}{125}$	$\frac{1}{4} - \frac{5}{17}Z + \frac{50\sqrt{85}}{4931}Z^{3/2} + O(Z^2)$
$\mathcal{T}_1$	$2(1+y)^3$	$-\frac{y(y-1)}{2}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{1}{8} - \frac{3}{8}Z + \frac{\sqrt{3}}{3}Z^{3/2} + O(Z^2)$
$\mathcal{T}_2$	$(1+y)^4$	$-y(y^2+y-1)$	$\frac{256}{27}$	$\frac{5}{27} - \frac{16}{27}Z + \frac{32\sqrt{6}}{81}Z^{3/2} + O(Z^2)$
$\mathcal{T}_3$	$\frac{1}{(y-1)^2}$	$\frac{y(y^2+y-1)}{(y-1)(1+y)^2}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{5}{32} - \frac{27}{128}Z + \frac{9\sqrt{3}}{128}Z^{3/2} + O(Z^2)$

Table 3: Composition schemas, of the form $\mathcal{M} = \mathcal{C} \circ \mathcal{H} + \mathcal{D}$, except the last one where $\mathcal{M} = (1+\mathcal{M}) \times (\mathcal{C} \circ \mathcal{H})$.

maps, $M(z)$	cores, $C(z)$	submaps, $H(z)$	coreless, $D(z)$
all, $M_1(z)$	bridgeless, or loopless $M_2(z)$	$z/(1-z(1+M))^2$	$z(1+M)^2$
loopless $M_2(z)$	simple $M_3(z)$	$z(1+M)$	–
all, $M_1(z)$	nonsep., $M_4(z)$	$z(1+M)^2$	–
nonsep. $M_4(z) - z$	nonsep. simple $M_5(z)$	$z(1+M)$	–
nonsep. $M_4(z)/z - 2$	3-connected $M_6(z)$	M	$z + 2M^2/(1+M)$
bipartite, $B_1(z)$	bip. simple, $B_2(z)$	$z(1+M)$	–
bipartite, $B_1(z)$	bip. bridgeless, $B_3(z)$	$z/(1-z(1+M))^2$	$z(1+M)^2$
bipartite, $B_1(z)$	bip. nonsep., $B_4(z)$	$z(1+M)^2$	–
bip. nonsep., $B_4(z)$	bip. ns. smpl, $B_5(z)$	$z(1+M)$	–
singular tri., $T_1(z)$	triang., $z + zT_2(z)$	$z(1+M)^3$	–
triangulations, $T_2(z)$	irreducible tri., $T_3(z)$	$z(1+M)^2$	–

a sequence of bridge leading to a submap can be attached. (This decomposition is dual to the previous one.)

- The *simple core of maps* is obtained by contracting all maximal cycles of length two into single edges. Conversely each edge of a simple core may be expanded into a cycle of length two containing a submap $((1 + M))$.
- The *nonsingular core of singular triangulations* is just the *simple* core of singular triangulations so that the schema is essentially the previous one. The difference of $H(z)$ is only due to the different definition of size (size n means here $n + 2$ vertices, thus $2n$ faces and $3n$ edges).
- The *nonseparable core of maps* was already discussed for general maps and works identically for bipartite maps.
- The *3-connected core of maps* is obtained cutting all maximal 2-separators and replacing the removed components by edges. This composition schema is described in [**120**].

The last schema, *irreducible core of triangulations*, is obtained by emptying all maximal 3-cycles and is described in [**20**]. It leads to a variant of the composition schema: the bivariate generating function is

$$M(z, u) = (1 + M(z))C(uH(z)).$$

However this modification does not alter the applicability of our methods.

Core size. From the expansions of Table 2, it is mechanically verified that, for each schema $M = C(H) + D$, the dominant singularity of $C(z)$ is precisely $H(\rho)$, where ρ is the dominant singularity of both $M(z)$ and $H(z)$. Thus all the composition schemas listed are critical and the analysis of Section 4 applies directly. (The last schema involves a slight adaptation but clearly resorts to a similar analysis.) In addition, as shown by Table 2, all families of Table 1 obey the Lagrangean framework, Equation (48), and are thus amenable to the saddle point methods of Sections 2, 3 as well.

Theorem 6 (Airy law for varieties of maps). *Consider any schema of Table 4 with parameters α_0, c and p_ℓ. The probability* $\mathrm{Prob}(X_n = k)$ *that a map of size n has a core of size k has a local limit law of the map–Airy type with centring constant α_0, scaling parameter c,*

Table 4: Parameters of the composition schemas of Table 3.

maps	cores	α_0	c	p_ℓ
general, $\mathcal{M}_1$	bridge/loopless, $\mathcal{M}_2$	$2/3$	$3/2$	$2/3$
loopless, $\mathcal{M}_2$	simple, $\mathcal{M}_3$	$2/3$	$3^{4/3}/4$	$2/3$
general, $\mathcal{M}_1$	nonseparable, $\mathcal{M}_4$	$1/3$	$3/4^{2/3}$	$1/3$
nonsep., $\mathcal{M}_4$	nonsep. simple, $\mathcal{M}_5$	$4/5$	$15^{5/3}/36$	$4/5$
nonsep., $\mathcal{M}_4$	3-connected, $\mathcal{M}_6$	$1/3$	$3^{4/3}/4$	$16/81$
bipartite, $\mathcal{B}_1$	bip. simple, $\mathcal{B}_2$	$5/9$	$3^{8/3}/20$	$5/9$
bipartite, $\mathcal{B}_1$	bip. bridgeless, $\mathcal{B}_3$	$3/5$	$(15/2)^{5/3}/18$	$3/5$
bipartite, $\mathcal{B}_1$	bip. nonsep., $\mathcal{B}_4$	$5/13$	$(13/6)^{5/3} \cdot 3/10$	$5/13$
bip. nonsep., $\mathcal{B}_4$	bip. nonsep. simple, $\mathcal{B}_5$	$5/17$	$(17/3)^{5/3} \cdot 3/20$	$5/17$
singular tri., $\mathcal{T}_1$	triangulations, $\mathcal{T}_2$	$1/2$	$(3/2)^{1/3}$	$1/2$
triangulations, $\mathcal{T}_2$	irreducible tri., $\mathcal{T}_3$	$1/2$	$6^{2/3}/3$	$729/2048$

and weight p_ℓ: uniformly for x in a bounded interval

$$\operatorname{Prob}\left(X_n = \lfloor \alpha_0 n + x n^{2/3} \rfloor\right) = p_\ell \cdot \frac{c\mathcal{A}(cx)}{n^{2/3}} \left(1 + O(n^{-1/3})\right).$$

5.2. The size of the largest component. It was observed in [**20, 76**] that the size of the core is related to the size of the largest component in random maps. In order to make this assertion more precise, let us first consider again the case of nonseparable cores of maps.

The set of nonseparable components of a map is uniquely defined by the following procedure: as long as a component contains a separating vertex, cut this vertex into two. This decomposition does not depend on the order in which separating vertices are cut; in particular it can be obtained by extracting the core, as illustrated by Figure 2, and recursively applying the same decomposition to each submap. The core of a map is thus one of its components.

All schemas of Table 3 lead to similar notions of $\mathcal{C}$-components in $\mathcal{M}$-maps. The aim of this section is then to characterize the size X_n^* of the largest $\mathcal{C}$-components in random $\mathcal{M}$-maps of size n with uniform distribution.

Theorem 7 (Largest components and Airy law). *Consider any schema of Table 4 with parameters α_0 and c. Let X_n^* be the size of the largest $\mathcal{C}$-component of in a random $\mathcal{M}$-map of size n with uniform distribution. Then*

$$\operatorname{Prob}\left(X_n^* = \lfloor \alpha_0 n + x n^{2/3} \rfloor\right) = \frac{c\mathcal{A}(cx)}{n^{2/3}} \left(1 + O(n^{-1/3})\right).$$

uniformly for x in any bounded interval.

Theorem 7 is proven in Appendix 7.4. It extends precisely results of Bender *et al.* [**20, 76**] who proved that the largest component is with high probability concentrated near $\alpha_0 n$. To wit:

$$\operatorname{Prob}\left(|X_n^* - \alpha_0 n| < \lambda(n) n^{2/3}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \tag{106}$$

where $\lambda(n)$ is any function going to infinity with n. The following proposition completes Theorem 7, and immediately follows from [**76**, Lemma 4].

Proposition 5. *The second largest $\mathcal{C}$-component of a random $\mathcal{M}$-map of size n has almost surely size $O(n^{2/3})$.*

Theorem 7 and Proposition 5 provide an appealing interpretation of the bimodal behaviour of the core. Indeed, it can be rephrased as follows for nonseparable components of random maps: *A random map $\mathfrak{m}$ has almost surely a largest nonseparable component of size map-Airy distributed around $n/3$.*

Now choose a new root r for $\mathfrak{m}$ among its n edges. There are two possibilities: (i) with probability $1/3$, r belongs to the largest component and the core has size map-Airy distributed around $n/3$; (ii) with probability $2/3$, r misses the largest component and the core is a small component of size almost surely at most $O(n^{2/3})$. The two modes of the distribution X_n correspond precisely to these two cases.

Finally similar estimates involving the Airy distribution apply to unrooted maps:

Theorem 8 (Unrooted maps). *The Airy law for largest components (Theorem 7) and the estimates of second largest components (Proposition 5) hold for random unrooted maps.*

The fact that unrooting does not affect asymptotic distributional properties usually holds true for a parameter of random maps whose definition does not depend on the root. Indeed the number of distinct rootings of an unrooted map with n edges is equal to $2n$ unless the

Probabilistic algorithm `Core(k)` with control function $f(k)$

repeat
1. Call `Map(n)` to generate a random map $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_n$ of size $n = f(k)$;
2. extract the core $\mathfrak{c}$ of $\mathfrak{m}$ with respect to the schema;

until $\mathfrak{c}$ has size k;
output $\mathfrak{c}$; $\{\mathfrak{c}$ is uniform in the core class $\mathcal{C}_k\}$.

Figure 10: The extraction/rejection algorithm `Core`.

map has a symmetry. But the probability that a random unrooted map has a symmetry is exponentially small in all families of Table 2, a fact that follows from the elegant analysis of Richmond and Wormald in [**110**]. The proof is then easily completed by following [**110**].

5.3. Random sampling algorithms. Random sampling algorithms for various families of maps have been described by Schaeffer in [**111, 112**]. Here, we show that all classes of maps described in Section 5.1 are amenable to efficient random generation and that the Airy distribution plays a rôle in the fine tuning of the corresponding algorithms.

First, there are four classes of maps which benefit of bijective equivalence with simpler combinatorial objects and, consequently, can be generated directly: general maps ($\mathcal{M}_1$), nonseparable maps ($\mathcal{M}_4$), bipartite maps ($\mathcal{B}_1$), and singular triangulations ($\mathcal{T}_1$). For these, one has available an algorithm, hereafter called `Map`, that relies on *conjugacy classes of trees*; see [**111, 112**] and also [**30**] for some new families. Given an integer n, `Map` outputs in linear time a map of size n, taken uniformly at random. For the purposes of the present article we take the algorithm `Map` (in its four variants) as granted.

Next, the algorithm, hereafter called `Core`, is a probabilistic algorithm based on the *extraction/rejection* method. This algorithm is described in Figure 10. For any composition schema (of the type $\mathcal{C}$-components in $\mathcal{M}$-maps), given an integer k, `Core` calls the algorithm `Map` as a black box and, by extracting cores till the "right" size k is encountered, it produces uniformly an element of $\mathcal{C}_k$. The `Core` algorithm applies directly to the classes of Tables 3 and 4 that appear as cores of $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_4, \mathcal{B}_1, \mathcal{T}_4$, namely, $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_5, \mathcal{M}_6, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{T}_2$. The remaining classes, $\mathcal{M}_3, \mathcal{B}_5, \mathcal{T}_3$ are "cores of cores": for these, one observes that critical composition schemas are closed under composition (with the parameters α_0 and p_ℓ that are then to be composed multiplicatively), so that "cores of cores" are eventually amenable to the `Core` algorithm.

We now examine complexity issues related to the rejection principle of `Core`. The expected number of iterations ℓ_k made by `Core` satisfies the exact relation $\ell_k = \text{Prob}(X_n = k)^{-1}$. The choice $f(k) = k/\alpha_0$ that was proposed in [**112**] yields for instance

$$\ell_k \sim \frac{1}{p_\ell c \mathcal{A}(0)} (k/\alpha_0)^{2/3}.$$

However, the cost gets improved if one maximizes $\text{Prob}(X_n = k)$ for a given value k. In particular, it proves advantageous to make use of the peak of the Airy distribution.

We also note that a simple variation, `Largest`, of the algorithm `Core` consists in extracting at Step 2 the largest component instead of the core. The `Largest` algorithm is only almost-uniform (*i.e.*, uniform safe for a set of asymptotically negligible measure, corresponding to maps with nonunique largest components). In the analysis of the number of iterations, the probability $\mathrm{Prob}(X_n = k)$ has then to be replaced by $\mathrm{Prob}(X_n^* = k)$. We have:

Theorem 9 (Exact-size random sampling). *For all core classes of Table 4, the choice $f(k) = k/\alpha_0$ yields a uniform random generator* `Core(k)` *whose average number of iterations satisfies*

$$\ell_k \sim \frac{1}{p_\ell c \mathcal{A}(0)} (k/\alpha_0)^{2/3}.$$

Let $x_0 \approx 0.44322$ be the position of the peak of the map-Airy density function $((1-4x_0^3)\mathrm{Ai}(x_0^2) + 4x_0^2 \mathrm{Ai}'(x_0^2) = 0)$. Then the optimal choice $\widehat{f}(k) = k/\alpha_0 - \frac{x_0}{\alpha_0 c}(k/\alpha_0)^{2/3}$ reduces further the expected number of iterations to

$$\widehat{\ell}_k \sim \frac{1}{p_\ell c \mathcal{A}(x_0)} (k/\alpha_0)^{2/3},$$

hence eliminating on average $1 - \mathcal{A}(0)/\mathcal{A}(x_0) \approx 30\%$ of iterations.

Similar results hold for the almost-uniform random generator `Largest`*, whose complexity is smaller by a factor $\sim p_\ell$.*

As explained in [**111, 112**], a call of the algorithm `Map` and the extraction of the core or of the largest component for the schemas of Table 3 take linear time. This proves that the extraction/rejection algorithms have overall complexity $O(k^{5/3})$.

The complexity can be further reduced by allowing some tolerance on the size of the map generated. In these variants, the algorithm is terminated as soon as a map of size $k \pm \Delta = [k - \Delta, k + \Delta]$ is obtained.

Theorem 10 (Approximate-size random sampling). *The number of iterations of the algorithm* `Core(`$k \pm \Delta$`)` *satisfies*

$$\ell_k(\Delta) = O\left(\frac{k^{2/3}}{\Delta}\right) + 1.$$

In particular, this algorithm, as well as its companion `Largest(`$k \pm \Delta$`)`*, becomes linear as soon as $\Delta \geq \theta\, k^{2/3}$ for some constant θ.*

Regarding unrooted maps, both `Map` and `Core` give rise to almost uniform random generators because the number of maps with a symmetry is exponentially small [**110**].

5.4. Experimental results. The random sampling algorithm `Map` has linear complexity and is thus very efficient: on a standard PC the generation speed is about 100,000 edges per second. Full decomposition in nonseparable components is linear as well and increases the cost of generation by a factor at most 2. This speed allows to produce very easily experimental observations of the results of the paper.

Figure 3 presents the observed frequencies of core-sizes for a sample of 50,000 maps with 2,000 edges. The theoretical curve as given by Theorem 4 fits perfectly the data on the full range $k \geq 10$, and upon using exact values for C_k, $k = 1 \ldots 9$, the fit is complete.

Figure 11 presents a region of width $n^{2/3}$ around $k = \alpha_0 n$ for two samples: 50,000 maps with 2,000 edges on the left hand side; 50,000 maps with 100,000 edges (with frequencies averaged over intervals of 20) on the right hand side. On each sample two theoretical curves are given, namely the local approximation of Theorem 6 and the second order approximation, Formula (86). While the second order curves fit perfectly the experimental data, the first order

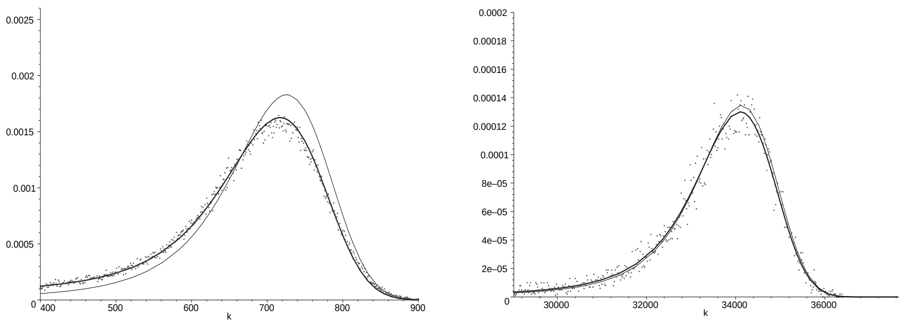


Figure 11: Core-size: Experimental results in the central region for $n = 2,000$ (left) and $n = 100,000$ (right), against first and second order approximations given by Theorems 6 and Formula (86).

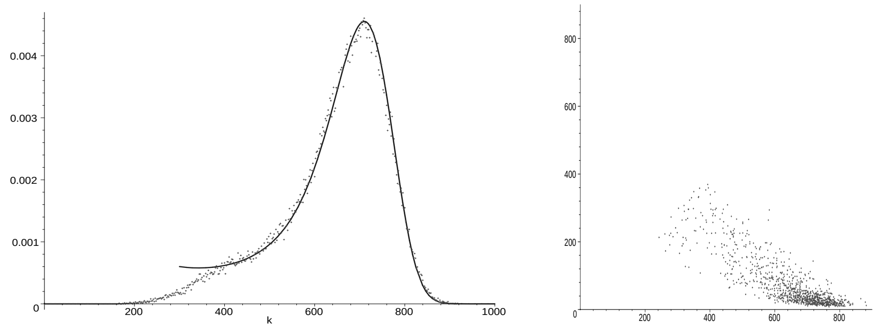


Figure 12: Left: Largest component sizes for $n = 2,000$, and predictions of Theorem 7. Right: Largest against second largest component sizes for 1,000 maps with 2,000 edges.

curve on the left hand side clearly displays an expected discrepancy of about $n^{-1/3} = 8\%$ for $n = 2,000$.

Figure 12 illustrates the result of Theorem 7: the size of the largest component in random maps. Again the sample has 50,000 maps with 2,000 edges and the fit with the theoretical curve is perfect, in a range much larger than expected (upon using again second order approximations). It is very interesting to note that the experimental curve presents a non regular point at $k \approx 400$ and starts decreasing much faster. This phenomenon probably occurs when the second largest component becomes almost as large as the first with high probability.

The interplay between the largest and second largest components is investigated more closely on the right hand side of Figure 12: the x-axis and y-axis correspond respectively to the sizes of the largest and second largest components and a sample of 1,000 maps of size 2,000 has been represented. Again it is worth pointing out that the value $k \approx 400$ corresponds to the largest size observed for which the second largest component has about the same size as the first.

6. Conclusion

The term of "universality" borrowed from statistical physics characterizes well the approach of our paper. By this is meant the isolation of phenomena that obey a common law whose global shape does not depend on specific details of the model. Here, we diagnose the existence of a "universality class" within analytic combinatorics, corresponding to coalescence of saddle points and confluence of singularities. A tangible sign is the occurrence of probability distributions and asymptotic estimates that involve the Airy function.

Despite the successes of the method of coalescing saddle points developed by applied mathematicians since the 1950's, we are only aware of scanty traces of the method being used in combinatorial enumerations. A special mention must however be made of Prellberg's paper [**107**] that provides an analysis of the area-perimeter generating function of staircase polygons in a "tri-critical region". (A technically difficult double inversion would still be required in order to transform Prellberg's estimates into enumerative or probabilistic results.) Roughly, two major orbits of problems seem to resort to a precise analysis of coalescence in saddle point landscapes.

(i) Large assemblies in critical regions must, under suitable singular conditions (Section 4, Appendix 7.1), lead to an Airy law of the map type (and more generally to stable densities). There, the density is, as we saw, directly expressible in terms of the Airy function.

(ii) Brownian excursion area involves a different type of Airy law, of the "area type", of which the moments are generated by the logarithmic derivative $\mathrm{Ai}'(z)/\mathrm{Ai}(z)$; see for instance [**63**] for an analytic discussion. As it is suggested by [**107**], it would be of great interest to develop a purely analytic connection between coalescing saddle points and the various combinatorial models that lead to the Airy law of the "area type". Candidates already mentioned in the introduction include displacement in parking allocations and hashing, path length in trees, as well as area under walks and polyominoes.

The Airy distribution of the area type also intervenes in the study of connectivity in random graphs and, from the recent work [**68**], it is at least known that an analytic approach based on coalescing saddle points can provide nontrivial quantitative estimates.

7. Appendix

7.1. Powers, Compositions, and Stable Laws. This section builds upon the technology introduced in Section 4 and more specifically on the proof of Theorem 5. We will see here that a mild extension of the method gives access to the analysis of powers of generating functions with algebraic–logarithmic singularities. This models large assemblies of combinatorial objects. An immediate consequence is the analysis of the size of the "core" in a composition $\mathcal{C} \circ \mathcal{H}$ as soon as the associated generating functions are algebraic–logarithmic. What appears systematically in this context is a collection of functions closely related to stable laws that are well-known in probability theory to arise as limit distributions of sums of independent random variables.

In what follows, we consider a generating function $H(z)$ that has nonnegative coefficients and a unique isolated singularity at its radius of convergence ρ, so that it satisfies the first two conditions of Equation (89) (with $\rho = r_H$). We shall relax the third condition of Equation (89) and consider more generally functions with a singular exponent $\lambda \notin \mathbb{N}$, which corresponds to a dominant singular term of the form $(1-z/\rho)^\lambda$ in the local singular expansion. The discussion is focussed on the three ranges of λ: $(0,1)$, $(1,2)$, and $(2,+\infty)$.

Theorem 11. *For any parameter $\lambda \in (0,2)$, define the entire function*

$$G(x,\lambda) := \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}x^k\frac{\Gamma(1+\lambda k)}{\Gamma(1+k)}\sin(\pi k\lambda) & (0<\lambda<1) \\ \dfrac{1}{\pi x}\displaystyle\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}x^k\frac{\Gamma(1+k/\lambda)}{\Gamma(1+k)}\sin(\pi k/\lambda) & (1<\lambda<2) \end{cases} \tag{107}$$

The coefficient of z^n in a large power $H(z)^k$ of a fixed algebraic–logarithmic function $H(z)$ with singular exponent λ admits the following asymptotic estimates.

(i) For $0<\lambda<1$, that is, $H(z)=\sigma-h_\lambda(1-z/\rho)^\lambda+O(1-z/\rho)$, and when $k=xn^\lambda$, with $x=O(1)$ in any compact subinterval of $(0,+\infty)$, there holds

$$[z^n]H^k(z) \;\sim\; \sigma^k\rho^{-n}\frac{1}{n}\,G\left(\frac{xh_\lambda}{\sigma},\lambda\right). \tag{108}$$

(ii) For $1<\lambda<2$, that is, $H(z)=\sigma-h_1(1-z/\rho)+h_\lambda(1-z/\rho)^\lambda+O((1-z/\rho)^2)$, when $k=\frac{\sigma}{h_1}n+xn^{1/\lambda}$, with $x=O(1)$ in any compact subinterval of $(-\infty,+\infty)$, there holds

$$[z^n]H^k(z) \;\sim\; \sigma^k\rho^{-n}\frac{1}{n^{1/\lambda}}(h_1/h_\lambda)^{1/\lambda}G\left(\frac{xh_1^{1+1/\lambda}}{\sigma h_\lambda^{1/\lambda}},\lambda\right). \tag{109}$$

(iii) For $\lambda>2$, a Gaussian approximation holds. In particular, for $2<\lambda<3$, that is, $H(z)=\sigma-h_1(1-z/\rho)+h_2(1-z/\rho)^2-h_\lambda(1-z/\rho)^\lambda+O((1-z/\rho)^3)$, when $k=\frac{\sigma}{h_1}n+x\sqrt{n}$, with $x=O(1)$ in any compact subinterval of $(-\infty,+\infty)$, there holds

$$[z^n]H^k(z) \;\sim\; \sigma^k\rho^{-n}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sigma/h_1}{a\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2a^2} \qquad \textit{with } a=2(\tfrac{h_2}{h_1}-\tfrac{h_1}{2\sigma})\sigma^2/h_1^2. \tag{110}$$

Proof. The proofs are similar to the proof of Theorem 5, Case *(ii)*, and just require a suitable adjustment of the geometry of the Hankel contour and of the corresponding scaling.

Case (i). A classical Hankel contour, with the change of variable $z=\rho(1-t/n)$, yields the approximation

$$[z^n]H^k(z) \;\sim\; -\frac{\sigma^k\rho^{-n}}{2i\pi n}\int e^{t-\frac{h_\lambda x}{\sigma}t^\lambda}\,dt$$

The integral is then simply estimated by expanding $\exp(-\frac{h_\lambda x}{\sigma}t^\lambda)$ and integrating termwise

$$[z^n]H^k(z) \;\sim\; -\frac{\sigma^k\rho^{-n}}{n}\sum_{k\geq 1}\frac{(-x)^k}{k!}\left(\frac{h_\lambda}{\sigma}\right)^k\frac{1}{\Gamma(-\lambda k)}, \tag{111}$$

which is equivalent to Equation (108), by virtue of the complement formula for the Gamma function.

Case (ii). When $1<\lambda<2$, the contour of integration in the z-plane is chosen to be a positively oriented loop, made of two rays of angle $\pi/(2\lambda)$ and $-\pi/(2\lambda)$ that intersect on the real axis at a distance $1/n^{1/\lambda}$ left of the singularity. The coefficient integral of H^k is rescaled by setting $z=\rho(1-t/n^{1/\lambda})$, and one has

$$[z^n]H^k(z) \;\sim\; -\frac{\sigma^k\rho^{-n}}{2i\pi n^{1/\lambda}}\int e^{\frac{h_\lambda}{h_1}t^\lambda}\,e^{-\frac{xh_1}{\sigma}t}\,dt.$$

There, the contour of integration in the t-plane comprises two rays of angle π/λ and $-\pi/\lambda$, intersecting at -1. Setting $u = t^\lambda h_\lambda / h_1$, the contour transforms into a classical Hankel contour, starting from $-\infty$ over the real axis, winding about the origin, and returning to $-\infty$. So, with $\alpha = 1/\lambda$, one has

$$[z^n]H^k(z) \;\sim\; -\frac{\sigma^k \rho^{-n}}{2i\pi n^\alpha}\,\alpha\left(\frac{h_1}{h_\lambda}\right)^\alpha \int e^u\, e^{-\frac{x h_1^{\alpha+1}}{\sigma h_\lambda^\alpha} u^\alpha}\, u^{\alpha-1}\, du\,.$$

Expanding the exponential, integrating termwise, and appealing to the complement formula for the Gamma function finally reduces this last form to (109).

Case (iii). When $2 < \lambda < 3$, the angle ϕ of the contour of integration in the z–plane is chosen to be $\pi/2$, and the scaling is $\sqrt{n}$: under the change of variable $z = \rho(1 - t/\sqrt{n})$, the contour is transformed into two rays of angle $\pi/2$ and $-\pi/2$ (*i.e.*, a vertical line), intersecting at -1, and

$$[z^n]H^k(z) \;\sim\; -\frac{\sigma^k \rho^{-n}}{2i\pi\sqrt{n}} \int e^{pt^2 - \frac{h_1 x}{\sigma} t}\, dt\,,$$

with $p = \frac{h_2}{h_1} - \frac{h_1}{2\sigma}$. Complementing the square, and letting $u = t - \frac{h_1 x}{2p\sigma}$, we get

$$[z^n]H^k(z) \;\sim\; -\frac{\sigma^k \rho^{-n}}{2i\pi\sqrt{n}} e^{-\frac{h_1^2}{4p\sigma^2} x^2} \int e^{pu^2}\, du\,,$$

which gives Equation (110). By similar means, such a Gaussian approximation can be shown to hold for any non-integral singular exponent $\lambda > 2$. $\square$

We observe that the function G reduces to a (generalized) hypergeometric form when λ is rational. It is in all cases expressible in terms of the density of a *stable law*[6] of index $\min(\lambda, 2)$. (Note: the Gaussian law is a particular stable law of index 2.) A comparison between our methods and Feller's treatment also shows the striking similarity of computations in both cases.

We now list a few applications.

(*a*) *Local Limit theorems for sums of generalized Zipf laws.* The generalized Zipf law of parameter $s > 1$ is the law of a random variable Z defined by

$$\text{Prob}(Z = k) = \frac{1}{\zeta(s)}\,\frac{1}{k^s},$$

where $\zeta(s)$ is the Riemann zeta function. It was proved in [**59**] that the probability generation function of Z satisfies precisely the conditions of singularity analysis (*i.e.*, it is continuable and admits a singular expansion valid outside of the unit circle) with the singular exponent being $\lambda = s - 1$. Hence, *the sum of a large number of independent copies of the Zipf law of parameter $s \in (1, 3)$ satisfies a* local *limit law of the stable type with parameter $s - 1$.* More generally, local limit laws of the stable variety will hold for sums of random variables whose probability generating function are algorithmic-logarithmic and continuable.

(*b*) The case $\lambda = 1/2$ covers many generating functions associated to combinatorial structures that are implicitly (or recursively) defined and have accordingly generating functions

[6] In probability theory, stable laws are defined as the possible limit laws of sums of independent identically distributed random variables. The function G above is a trivial variant of the density of the stable law of index λ; see Feller's book [**55**, p. 581–583]. Valuable informations regarding stable laws may be found in the books by Breiman [**31**, Sec. 9.8], Durett [**52**, Sec. 2.7], and Zolotarev [**129**].

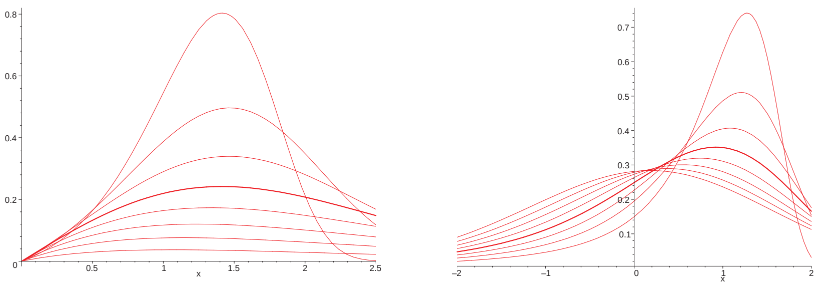


Figure 13: The G-functions for $\lambda = 0.1\,..0.8$ (left; from bottom to top) and for $\lambda = 1.2\,..\,1.9$ (right; from top to bottom); the thicker curves represent the Rayleigh law (left, $\lambda = \frac{1}{2}$) and the Airy law (right, $\lambda = \frac{3}{2}$).

with a square-root singularity. This includes the varieties of simple trees introduced by Meir and Moon in [**94**]. Then, one has

$$G(x, \frac{1}{2}) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \exp(-x^2/4), \qquad [z^n]H^k(z) \;\sim\; \frac{\sigma^k \rho^{-n}}{n}\, G(x\frac{h_\lambda}{\sigma}, \frac{1}{2}).$$

The law with density proportional to $xe^{-x^2/4}$ is known as the Rayleigh law: it has been detected in simple trees by Meir and Moon who base their analysis on a Lagrangean change of variable and on the saddle point method. A consequence of [**94**] and of Theorem 11 is then: *The profile of a large tree in a simple family obeys a Rayleigh law in the asymptotic limit.* Similar results apply to $T(z)$, the Cayley tree function ($T = ze^T$) that enumerates rooted labelled nonplanar trees.

(c) The case $\lambda = 3/2$ that appears in maps is the one that motivated the present paper, the law being precisely of the Airy type in this case. Equivalently, the estimates involve the stable law of index $\frac{3}{2}$. The singular exponent $\frac{3}{2}$ is generally expected in *unrooted* trees since there is a ratio of about n between the numbers of rooted and unrooted trees. The recent book of Kolchin [**87**] discusses the enumeration of forests of unrooted labelled trees by number of components: what is here at stake is the estimation of coefficients $[z^n]U(z)^k$ where $U(z)$ is the exponential generating function of unrooted trees, *i.e.*, $U = T - T^2/2$ where $T = ze^T$ is the Cayley tree function. Consequently, an Airy density is expected to surface in the asymptotic estimates: see Theorem 1.4.2 of [**87**] for an illustration. (Kolchin's method is based on characteristic functions and is equivalent to integrating along the circle of convergence rather than going *outside*.) Next, the "giant paper on the giant component" [**83**] analyses the random graph in its "critical" region where the (unrooted) tree components play an essential rôle. The analysis involves functions closely related to Airy functions. It is interesting to note that the proof of a major lemma, Lemma 3 of [**83**], does rely on a contour of the same type as ours. (The seven page proof in [**83**] is justified by the need there to develop uniform estimates valid in a wide region as well as to cope with a singular multiplier.) Finally, a similar situation is encountered in [**62**, p. 182–183] where the paper deals with the appearance of the first cycles in random graphs.

7.1.1. *Combinatorial compositions.* The results of Theorem 11 provide useful information on composition schemas of the form

$$M(z,u) = C(uH(z)),$$

provided C and H are algebraic-logarithmic in the sense above. Combinatorially, this represents a substitution between structures, $\mathcal{M} = \mathcal{C} \circ \mathcal{H}$, and the coefficient $[z^n u^k]M(z,u)$ counts the number of $\mathcal{M}$-structures of size n whose $\mathcal{C}$-core has size k. Then the probability distribution of core size X_n in $\mathcal{M}$-structures of size n is given by

$$\text{Prob}(X_n = k) = \frac{[z^k]C(z)}{[z^n]C(H(z))}\,[z^n]H(z)^k.$$

The case where the schema is critical[7], in the sense that $H(r_H) = r_C$ with r_H, r_C the radii of convergence of H, C, follows as a direct consequence of Theorem 11. What comes out is the following informally stated general principle (details would closely mimic the statement of Theorem 11 and are omitted).

Theorem 12 (General composition schema). *In a composition schema $C(uH(z))$ where H and C have singular exponents λ, λ' (with $\lambda' \leq \lambda$):*

(i) for $0 < \lambda < 1$, the normalized core size X_n/n^λ is spread over $(0, +\infty)$ and it satisfies a local limit law whose density involves the stable law of index λ;

(ii) for $1 < \lambda < 2$, the distribution of X_n is bimodal and the "large" region $X_n = cn + xn^{1/\lambda}$ leads to a stable law of index λ;

(iii) for $2 < \lambda$, the standardized version of X_n admits a local limit law that is of Gaussian type.

Similar phenomena occur when $\lambda' > \lambda$, but with a greater preponderance of the "small" region.

Many instances have already appeared scattered in the literature. especially in connection with rooted trees. For instance, the Rayleigh law ($\lambda = \frac{1}{2}$) appears as the distribution of cyclic points in random mappings; see [**46**] for this fact and many other occurrences of this law. Naturally, the case $\lambda = 3/2$ present in maps is of the one that has motivated the present study.

7.2. The Airy distribution. In this appendix, we summarize a few properties of the Airy distribution, namely, integral representations, series expansions, and integral transforms.

(*i*) *Integral representations.* The Airy distribution appears first through local expansions of nearby saddle points (Section 2 and proof of Theorem 3), as

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{i\pi}\int_{\infty e^{-i\theta}}^{\infty e^{i\theta}} \exp\left(\frac{1}{3}u^3 - xu^2\right) u\,du, \qquad \theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}). \tag{112}$$

[7]Noncritical cases follow from standard methods. In the subcritical case $H(r_H) < r_C$, core size is $O(1)$ with high probability and its law is directly induced from the initial coefficients of C. (This results from direct singularity analysis.) In the supercritical case $H(r_H) > r_C$ core size is typically about $O(n)$ and obeys a Gaussian law in the limit. (This results from standard singularity perturbation techniques as developed in [**17, 71, 82**].)

This form clearly shows its origin as an exponential-cubic approximation. In the context of singularity analysis (Section 4 and Appendix 7.1), what arises is the integral representation

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\infty e^{-i\theta'}}^{\infty e^{i\theta'}} \exp\left(\frac{1}{3}t^{3/2} - xt\right)\,dt, \qquad \theta' \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}), \tag{113}$$

which is trivially equivalent to (112) via the change of variable $u = t^2$. A translation $u = v + x$ transforms the integral of (112) into

$$\mathcal{A}(x) = e^{-2x^3/3}\frac{1}{i\pi}\int_{\infty e^{-i\theta}}^{\infty e^{i\theta}} \exp\left(\frac{1}{3}v^3 - vx^2\right)(v+x)\,dx. \tag{114}$$

This last form is equivalent (modulo the rotation $v = -iw$) to the definition we gave (Definition 1) of the Airy distribution by way of the Airy function, itself defined by the integral representation (45). As asymptotic expansions of the Airy function at $\pm\infty$ have long been tabulated, one additionally obtains from the Airy connection the tail estimates expressed by (47).

(*ii*) *Series expansions.* The expression of the Airy distribution in terms of the Airy function is itself a series expansion in disguise. A direct expansion is obtained by starting from (113), expanding into power series the exponential $\exp(-xt)$, and integrating termwise. The process is the one also used in a general context in Appendix 7.1. The net result is the form

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{\pi x}\sum_{n\ge 1}(-x3^{2/3})^n\frac{\Gamma((2n+3)/3)}{n!}\sin(-2n\pi/3). \tag{115}$$

Naturally, this means that the Airy density is reducible to hypergeometric functions.

(*iii*) *Mellin transforms.* The Mellin transform of a function $f(x)$ that exists on $(0, +\infty)$ is classically defined as

$$f^\star(s) = \mathfrak{M}(f(x)\,;s) := \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx.$$

Knowledge of the Mellin transform (at s) of a probability density supported on $(0, +\infty)$ is thus equivalent to knowledge of a fractional moment (of order $s-1$) of the density. For the Airy distributions, we define separately

$$\mathcal{A}_+(x) := \text{if } x > 0 \text{ then } \mathcal{A}(x) \text{ else } 0; \qquad \mathcal{A}_-(x) := \text{if } x < 0 \text{ then } \mathcal{A}(-x) \text{ else } 0.$$

The corresponding Mellin transforms are then written as $\mathcal{A}_+^\star(s)$ and $\mathcal{A}_-^\star(s)$. In the case at hand, there are two possible approaches to the determination of the transform: one is based on the integral representations (112) or (113) and the general transform of multiplicative convolution integrals,

$$\mathfrak{M}\left(\int_\gamma a(u)b(xu)du\,;s\right) = b^\star(s)\int_\gamma a(u)u^{-s}\,du$$

(this results from an interchange of integrals; see [**128**, p. 151]); the other is based on the series expansion (115) and the general Mellin-Lindelöf-Ramanujan representation

$$\sum_{n=1}^\infty \phi(n)\frac{(-x)^n}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty}\phi(-s)\Gamma(s)x^{-s}\,ds,$$

or, equivalently,

$$\phi(-s)\Gamma(s) = \mathfrak{M}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \phi(n)\frac{(-x)^n}{n!}; s\right)$$

(this results from a residue calculation and from the Mellin inversion formula; see [**81**, Ch. XI]).

For the Airy distributions either method is applicable and one finds (after routine manipulations)

$$\mathcal{A}_+^\star(s) = 2\,3^{-\frac{2s+1}{3}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{2s+1}{3}\right)}, \quad 0 < \Re(s) < \infty \tag{116}$$

$$\mathcal{A}_-^\star(s) = 3^{-\frac{2s+1}{3}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{2s+1}{3}\right)} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}(s-1)}, \quad 0 < \Re(s) < \frac{5}{2}. \tag{117}$$

In particular, one has $\mathcal{A}_+(1) = \frac{2}{3}$, $\mathcal{A}_-(1) = \frac{1}{3}$. This verifies that $\mathcal{A}(x)$ is a probability density and that two thirds of the probability mass are assigned to the positive region. Also, $\mathcal{A}_+(2) = \mathcal{A}_-(2) = 3^{-2/3}/\Gamma(2/3)$, which implies that the mean of the Airy distribution equals 0. Generally, formulæ (116) and (117) can be used to evaluate explicitly any fractional moment of the Airy law, for instance,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|x|}\mathcal{A}(x)\,dx = \frac{1}{6\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{2}{3})\left(3^{2/3} + 3^{7/6}\right).$$

7.3. Conformality of $z(t)$ and coalescent saddles. In this section, we take $k = \alpha_0 n + \beta n$, with β fixed and the notations of Section 3 are used. We prove that there exists indeed a change of variable $z \to t$, with $\tau_d = \pm\xi$, that satisfies (87) and is a conformal mapping of the disc D onto a domain D_β. The strategy consists in constructing first a mapping $z \to t$ that is continuous and one-to-one between D and some domain D_β, then checking that it is conformal.

7.3.1. *A one-to-one continuous mapping.* The mapping $z \to u = K(z)$ is continuous for $z \in D$ and so is the mapping $t \to u = f(t)$ for $t \in \mathbb{C}$. The problem is that they are not one-to-one. However we shall provide a partition of the whole complex plane $\mathbb{C} = \bigcup_{i=1}^6 C_i$ such that each $f|_{C_i}$ is one-to-one, another partition $D = \bigcup_{i=1}^6 D_i$ such that each restriction $K|_{D_i}$ is one-to-one, and such that $K(D_i) \subset f(C_i)$.

This will allow us to define for each i a continuous one-to-one mapping $z \to t$ from D_i onto $C_i' \subset C_i$; we shall choose the D_i so that it follows immediately that the resulting six mappings coherently define a one-to-one mapping of D onto a domain D_β.

Let $\mathcal{H}_+$, $\mathcal{H}_-$ and $\mathcal{H}_0$ denote respectively the half planes $\{u \mid \Im u \geq 0\}$, $\{u \mid \Im u \leq 0\}$ and imaginary u-axis. The partition of $\mathbb{C}$ is readily obtained by considering the inverse image of $\mathcal{H}_0$ by f, *i.e.*, the curve

$$\mathcal{C}_0 = \{t \mid \Im f(t) = 0\} = \mathbb{R} \cup \{t = x + iy \mid 3s^2 - 3x^2 + y^2\}.$$

The three smooth components of this curve partition the t-plane into six regions C_i, as defined for $\beta < 0$, $\beta = 0$ and $\beta > 0$ by Figure 15. More precisely we take each C_i to include its border, so that its image is $\mathcal{H}_+$ for $i = 1, 3, 5$ and $\mathcal{H}_-$ for $i = 2, 4, 6$. In particular each $C_i \cap C_j$ is either empty or a smooth segment of the curve $\mathcal{C}_0$.

In each of the two regions C_1, C_4, one easily verifies that $\Re f'(t)$ has a constant nonzero sign. In each of the other four regions, $\Im f'(t)$ has a constant nonzero sign. Hence in each region C_i, the mapping $t \to f(t)$ is one-to-one (and of course continuous).

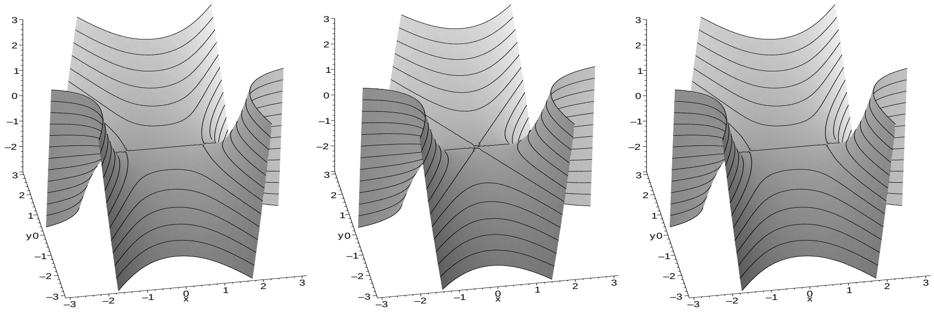


Figure 14: The landscape of $\Im f(t)$, for $\beta < 0$, $\beta = 0$ and $\beta > 0$.

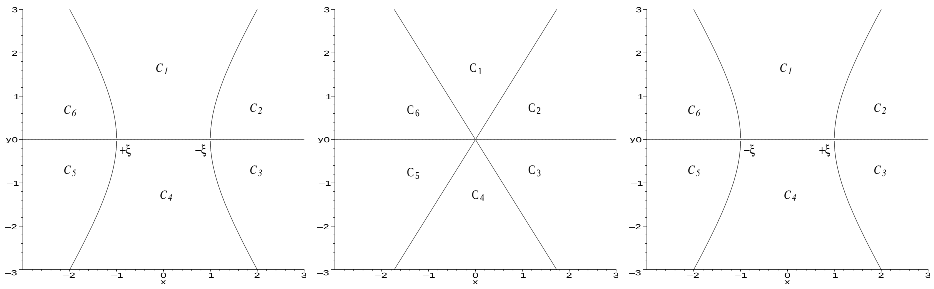


Figure 15: Partition of the t-plane, for $\beta < 0$, $\beta = 0$ and $\beta > 0$.

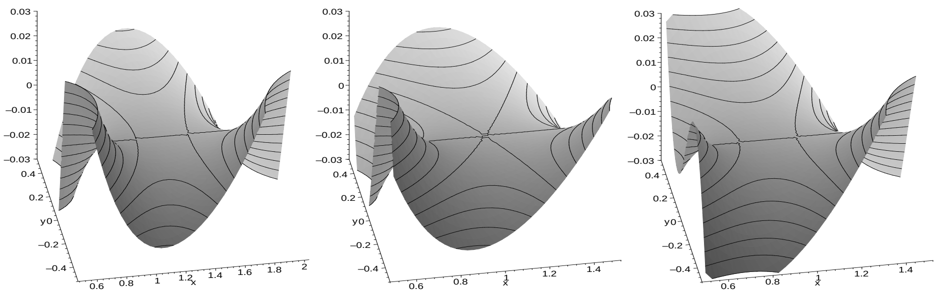


Figure 16: The landscape of $\Im K(z)$, for $\beta < 0$, $\beta = 0$ and $\beta > 0$.

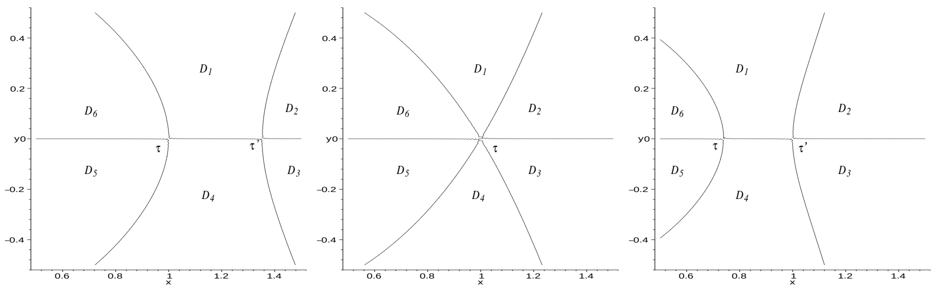


Figure 17: Partition of the z-plane, for $\beta < 0$, $\beta = 0$ and $\beta > 0$.

The construction is exactly the same for the mapping $z \to K(z)$, except that the region of interest is restricted to D. From the technical point of view, one has to study the curve

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_0 &= \{z \mid \Im K(z) = 0\} \\ &= \mathbb{R} \cup \{z \mid 2\arg((3-z)(1+z)^3/z) + 3\beta\arg(z(3-z)^2) = 0\},\end{aligned}$$

and prove that inside the disc D, it behaves qualitatively like C_0. This analysis is done in view of the derivative

$$K'(z) = (z-\tau)(z-\tau')\frac{3\beta+2}{z(1+z)(3-z)}$$

that depends linearly on β. As illustrated by Figure 16 and 17 the landscape of $\Im K(z)$ leads to a partition D_i in agreement with the partition C_i of Figure 15.

Once this is done, the local mappings can be composed to give six local mapping $z \to t$. These local mappings are coherent since the local mappings are identical on the intersection $D_i \cap D_j$ and $C_i \cap C_j$. Thus, a continuous one-to-one mapping from D to a domain D_β has been defined and we let $z(t)$ be the inverse mapping.

7.3.2. *A study of* $\dot z(t)$. In order for the constructed mapping $z \to t$ to be conformal, it remains to check the necessary condition that $\dot z(t)$ is finite and nonzero. But, by differentiation of (87), one has

$$\dot z(t)K'(z) = -\left(t^2 - \xi^2\right), \tag{118}$$

so that $\dot z(t)$ is seen to satisfy

$$\dot z(t) = \frac{t-\xi}{z-\tau}\frac{t+\xi}{z-\tau'}\frac{(3-z)(1+z)z}{2+3\beta}. \tag{119}$$

Hence in D, there may only be problems at $z = \tau$ and $z = \tau'$. But letting t go to ξ or $-\xi$ this provides

$$\dot z(\xi)^2 = \frac{-\xi}{\tau'-\tau}\frac{(3-\tau)(1+\tau)\tau}{2+3\beta} \quad \text{and} \quad \dot z(-\xi)^2 = \frac{\xi}{\tau'-\tau}\frac{(3-\tau')(1+\tau')\tau'}{2+3\beta}.$$

Finally the sign is seen to be positive by considering a point other than $\pm\xi$ on the real axis. This yields

$$\dot z(\xi) = \sqrt{\frac{4\xi}{3\beta}} \quad \text{and} \quad \dot z(-\xi) = \sqrt{\frac{4\xi}{3\beta}\frac{(1+3\beta)(1-3\beta/2)}{(1+3\beta/2)^3}}. \tag{120}$$

These values are involved in the computation of a_1.

7.4. Largest components (proof of the Theorem). Let us first prove Theorem 7 in the case of nonseparable cores of maps. Recall that $M_{n,k}$ is the number of maps of size n with a core of size k, and set the following notations: $M^*_{n,k}$ is the number of maps of size n with a largest component of size k; $B_{n,k}$ is the number of maps of size n with a core of size k that is not the largest component. Then, the following relation holds:

$$2nM_{n,k} = 2kM^*_{n,k} + 2nB_{n,k}. \tag{121}$$

This relation is proven in two steps. First of all, amongst the $2nM_{n,k}$ maps of size n with a core of size k and a secondary root, exactly $2nB_{n,k}$ have a core which is not the largest component. Second of all, the remaining maps have a core which is the largest component and, upon exchanging the rôle of the two roots, they are identified with the $2kM^*_{n,k}$ maps that have a largest component of size k and a secondary root chosen in the largest component.

The following lemma next allows us to dispose of the $B_{n,k}$ term.

Lemma 1. *Under the uniform distribution on maps with size n and core-size $k = \lfloor \alpha_0 n + xn^{2/3} \rfloor$ for some x, the core is almost surely the largest component.*

More precisely, there exists $A < 1$ such that

$$\mathrm{Prob}(X_n^* > X_n \mid X_n = k) = \frac{B_{n,k}}{M_{n,k}} = O(A^n),$$

with $k = \lfloor \alpha_0 n + xn^{2/3} \rfloor$, uniformly for x in a bounded interval.

Proof. Let $\mathfrak{m}$ be a map of size n with a core $\mathfrak{c}$ of size k and a largest component $\mathfrak{l}$ of size $h > k$. The largest component $\mathfrak{l}$ is contained in one of the pending submap $\mathfrak{n}$ in the core decomposition of $\mathfrak{m}$. Let $\mathfrak{m}'$ be obtained from $\mathfrak{m}$ by detaching $\mathfrak{n}$. Then $\mathfrak{m}$ can be uniquely reconstructed from $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}$ and the position in the core of $\mathfrak{m}'$ where $\mathfrak{n}$ is to be attached. The number $B_{n,k}$ of maps $\mathfrak{m}$ is thus bounded from above by the number of such triples: with ℓ representing the size of $\mathfrak{n}$,

$$B_{n,k} \leq \sum_{k<h<\ell<n-k} M_{n-\ell,k} \cdot M^*_{\ell,h} \cdot 2k \ \leq 2k \sum_{k<h<\ell<n-k} \frac{\ell}{h} M_{n-\ell,k} M_{\ell,h},$$

where the second inequality follows from (121). Hence the probability satisfies

$$\frac{B_{n,k}}{M_{n,k}} \leq 2k \sum_{k<h<\ell<n-k} \frac{\ell}{h} \frac{M_{n-\ell,k}}{M_{n-\ell}} \frac{M_{\ell,h}}{M_\ell} \frac{M_n}{M_{n,k}} \frac{M_\ell M_{n-\ell}}{M_n}$$

Theorem 5 allows us to bound the ratios: the rough upper bound $M_{\ell,h}/M_\ell = O(h^{-2/3})$ is valid for all ℓ, h; $M_{n,k}/M_n = \Theta(n^{-2/3})$ since $k = \alpha_0 n + xn^{2/3}$ with x bounded; finally $k/(n-\ell) \sim \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} > \alpha_0$, so that there exists $A_0 < 1$ such that $M_{n-\ell,k}/M_{n-\ell} = O(A_0^k)$. This ensures the existence of some $A_1 < 1$ such that

$$\frac{B_{n,k}}{M_{n,k}} \leq C_1 n \sum_{k<h<\ell<n-k} \frac{\ell}{h} \cdot A_0^k h^{-2/3} n^{2/3} \frac{n^{5/2}}{\ell^{5/2}(n-\ell)^{5/2}} \leq C_2 A_1^n,$$

hence the statement of the lemma. □

Finally, Lemma 1 and Relation (121) combine to yield

$$M^*_{n,k} = \frac{n}{k}\, M_{n,k}\, (1 + O(A^n)) = \frac{1}{\alpha_0}\, M_{n,k}\ (1 - \tfrac{x}{\alpha_0} n^{-1/3} + O(n^{-2/3}))$$

for $k = n/3 + xn^{2/3}$, uniformly for x in a bounded interval. Together with $\alpha_0 = p_\ell$, this concludes the proof of Theorem 7 for nonseparable components of maps.

The proof extends verbatim for all schemas with $\alpha_0 = p_\ell$. For the two remaining ones a difference arises from the fact that some edges are shared by different components (*e.g.*, the edges of separating 3-cycles get duplicated in the decomposition of triangulations into irreducible triangulations). The same difference surfaces in [**20, 76**] in the proof given there of our Equation (106). The adaptation given in [**20, 76**] of the general argument to the case of irreducible cores of triangulations and 3-connected cores of nonseparable maps works equally well in our case.

Acknowledgements. This work was supported in part by the IST Programme of the EU under contract number IST-1999-14186 (ALCOM-FT).

Bibliographie

[1] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions.* Dover, 1973. A reprint of the tenth National Bureau of Standards edition, 1964.

[2] David J. Aldous and James Fill. *Reversible Markov Chains and Random Walks on Graphs.* Book in preparation., 1990-2000. Available at http ://www.stat.berkeley.edu/users/aldous/book.html.

[3] Richard Arratia. On the Stanley-Wilf conjecture for the number of permutations avoiding a given pattern. *Electronic Journal of Combinatorics*, 6(1) :Note, N1, 4 pp. (electronic), 1999.

[4] Cyril Banderier. Combinatoire analytique : application aux marches aléatoires. *Mémoire de DEA, Université Paris VII*, 1998.

[5] Cyril Banderier, Mireille Bousquet-Mélou, Alain Denise, Philippe Flajolet, Danièle Gardy, and Dominique Gouyou-Beauchamps. On generating functions of generating trees. *Proceedings of FPSAC'99*, pages 40–52, 1999. Also available as INRIA Research Report #3661.

[6] Cyril Banderier, Mireille Bousquet-Mélou, Alain Denise, Philippe Flajolet, Danièle Gardy, and Dominique Gouyou-Beauchamps. Generating functions for generating trees. *Accepted in Discrete Mathematics*, 2000. 27 pages.

[7] Cyril Banderier and Robert P. Dobrow. A generalized cover time for random walks on graphs. In *FPSAC'00*, pages 113–124. Springer, June 2000.

[8] Cyril Banderier and Philippe Flajolet. Basic analytic combinatorics of directed lattice paths. *Theoretical Computer Science*, June 2001. Submitted, 37 pages.

[9] Cyril Banderier, Philippe Flajolet, Gilles Schaeffer, and Michèle Soria. Planar maps and Airy phenomena. In E. Welzl U. Montanari, J. Rolim, editor, *Automata, Languages, and Programming*, number 1853 in Lecture Notes in Computer Science, pages 388–402. Springer-Verlag, 2000. Proceedings of the 27th ICALP Conference, Geneva, July 2000.

[10] Cyril Banderier, Philippe Flajolet, Gilles Schaeffer, and Michèle Soria. Random maps, coalescing saddles, singularity analysis, and Airy phenomena. *Submitted to Random Structures and Algorithms*, 2001. 47 pages.

[11] Elena Barcucci, Alberto Del Lungo, Elisa Pergola, and Renzo Pinzani. ECO : a methodology for the enumeration of combinatorial objects. *Preprint*, 1998.

[12] Elena Barcucci, Alberto Del Lungo, Elisa Pergola, and Renzo Pinzani. From C_n to $n!$: permutations avoiding $S_j(j+1)(j+2)$. In *Proceedings of FPSAC'98*, pages 31–41, Toronto, 1998.

[13] Elena Barcucci, Alberto Del Lungo, Elisa Pergola, and Renzo Pinzani. A methodology for plane tree enumeration. *Discrete Mathematics*, 180(1-3) :45–64, 1998.

[14] Elena Barcucci, Alberto Del Lungo, Elisa Pergola, and Renzo Pinzani. From Motzkin to Catalan permutations. *Discrete Mathematics*, 217(1-3) :33–49, 2000. Formal power series and algebraic combinatorics (Vienna, 1997).

[15] Elisa Barcucci, Alberto Del Lungo, and Elisa Pergola. Random generation of trees and other combinatorial objects. *Theoretical Computer Science*, 218(2) :219–232, 1999.

[16] Carl M. Bender and Steven Alan Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers. I.* Springer-Verlag, New York, 1999. Asymptotic methods and perturbation theory, Reprint of the 1978 original.

[17] Edward Anton Bender. Central and local limit theorems applied to asymptotic enumeration. *Journal of Combinatorial Theory*, 15 :91–111, 1973.

[18] Edward Anton Bender. Asymptotic methods in enumeration. *SIAM Review*, 16(4) :485–515, October 1974.

[19] Edward Anton Bender. Some unsolved problems in map enumeration. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 3 :51–56, 1991.

[20] Edward Anton Bender, Lawrence Bruce Richmond, and Nicholas Charles Wormald. Largest 4-connected components of 3-connected planar triangulations. *Random Structures & Algorithms*, 7(4) :273–285, 1995.

[21] Norman Bleistein and Richard A. Handelsman. *Asymptotic Expansions of Integrals.* Dover, New York, 1986. A reprint of the second Holt, Rinehart and Winston edition, 1975.

[22] Béla Bollobás, Christian Borgs, Jennifer Tour Chayes, Jeong Han Kim, and David Bruce Wilson. The scaling window of the 2-SAT transition. Preprint, 1999. Available as document math.CO/9909031 at the Los Alamos archive `http ://xxx.lanl.gov/form/`.

[23] Arnon Boneh and Micha Hofri. The coupon-collector problem revisited. *Communications in Statistics. Stochastic Models*, 13(1) :39–66, 1997.

[24] Mireille Bousquet-Mélou. *Combinatoire énumérative.* Habilitation à diriger des recherches, Université de Bordeaux I, 1996.

[25] Mireille Bousquet-Mélou. Multi-statistic enumeration of two-stack sortable permutations. *Electronic Journal of Combinatorics*, 5 :R21, 1998.

[26] Mireille Bousquet-Mélou. Un modèle un peu plus général de marches sur **N**. Preprint, Décembre 1998.

[27] Mireille Bousquet-Mélou. Communication personnelle, juin 1998.

[28] Mireille Bousquet-Mélou and Marko Petkovšek. Linear recurrences with constant coefficients : the multivariate case. *Discrete Mathematics*, 225(1-3) :51–75, 2000.

[29] Mireille Bousquet-Mélou and Gilles Schaeffer. Counting paths on the slit plane. In *Mathematics and computer science (Versailles, 2000)*, pages 101–112, Basel, 2000. Birkhäuser.

[30] Mireille Bousquet-Mélou and Gilles Schaeffer. Enumeration of planar constellations. *Advances in Applied Mathematics*, 24(4) :337–368, 2000.

[31] Leo Breiman. *Probability.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992. Corrected reprint of the 1968 original.

[32] Jean-Luc Chabert, Évelyne Barbin, Michel Guillemot, Anne Michel-Pajus, Jacques Borowczyk, Ahmed Djebbar, and Jean-Claude Martzloff. *Histoire d'algorithmes.* Belin, Paris, 1994. Du caillou à la puce. [From the pebble to the chip].

[33] Noam Chomsky and Marcel-Paul Schützenberger. The algebraic theory of context-free languages. In *Computer programming and formal systems*, pages 118–161. North-Holland, Amsterdam, 1963.

[34] Fan Rong King Chung, Ronald Lewis Graham, Verner Emil Jr Hoggatt, and Mark Kleiman. The number of Baxter permutations. *J. Combin. Theory Ser. A*, 24 :382–394, 1978.

[35] Frédéric Chyzak. *Fonctions holonomes en calcul formel.* Thèse universitaire, École polytechnique, 1998. INRIA, TU 0531. 227 pages.

[36] Louis Comtet. *Analyse combinatoire*, volume 1 et 2. P.U.F, 1970.

[37] Robert Cori and Jean Richard. Énumération des graphes planaires à l'aide des séries formelles en variables non commutatives. *Discrete Mathematics*, 2 :115–162, 1972.

[38] Sylvie Corteel. Séries génératrices exponentielles pour les eco-systèmes signés. In *FPSAC'00*. Springer, June 2000.

[39] Sándor Csörgő. A rate of convergence for coupon collectors. *Acta Universitatis Szegediensis. Acta Scientiarum Mathematicarum*, 57(1-4) :337–351, 1993.

[40] Nicolaas Govert De Bruijn. *Asymptotic Methods in Analysis.* Dover, 1981. A reprint of the third North Holland edition, 1970 (first edition, 1958).

[41] Nicolaas Govert de Bruijn, Donald Ervin Knuth, and Stephan Oswald Rice. The average height of planted plane trees. In *Graph theory and computing*, pages 15–22. Academic Press, New York, 1972.

[42] Henri Auguste Delannoy. Emploi de l'échiquier pour la résolution de certains problèmes de probabilités. *Association française pour l'avancement des sciences*, (Compte rendu de la 24e session (Bordeaux). Seconde partie - notes et mémoires.), 1895.

[43] Marie-Pierre Delest and Gérard Viennot. Algebraic languages and polyominoes enumeration. *Theoretical Computer Science*, 34(1-2) :169–206, 1984.

[44] Alain Denise, Danièle Gardy, and Dominique Gouyou-Beauchamps. ECO methodology and generating series. *Preprint*, juin 1998.

[45] Jean Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Hermann, Paris, 1968.

[46] Michael Drmota and Michèle Soria. Images and preimages in random mappings. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 10(2) :246–269, 1997.

[47] Philippe Duchon. Q-grammars and wall polyominoes. *Annals of Combinatorics*, 3 :311–321, 1999.

[48] Philippe Duchon. On the enumeration and generation of generalized Dyck words. *Discrete Mathematics*, 225(1-3) :121–135, 2000. Formal power series and algebraic combinatorics (Toronto, 1998).

[49] Serge Dulucq, Sophie Gire, and Olivier Guibert. A combinatorial proof of J. West's conjecture. *Discrete Mathematics*, 187(1-3) :71–96, 1998.

[50] Serge Dulucq, Sophie Gire, and Julian West. Permutations with forbidden subsequences and nonseparable planar maps. *Discrete Mathematics*, 153(1-3) :85–103, 1996.

[51] Marianne Durand and Michael Fellows. Asymptotic of the klam recurrence. *Note in preparation*, 2001.

[52] Richard Durrett. *Probability : theory and examples.* Duxbury Press, Belmont, CA, second edition, 1996.

[53] Guy Fayolle and Rudolph Iasnogorodski. Solutions of functional equations arising in the analysis of two-server queueing models. In *Performance of computer systems (Proc. Fourth Internat. Sympos. Modelling Performance Evaluation Comput. Systems, Vienna, 1979)*, pages 289–303. North-Holland, Amsterdam, 1979.

[54] Uriel Feige. Collecting coupons on trees, and the cover time of random walks. *Computational Complexity*, 6(4) :341–356, 1996/97.

[55] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1971.

[56] Steven Finch. Pólya's random walk constants, 2000. www.mathsoft.com/asolve/constant/polya/polya.html.

[57] Philippe Flajolet. Combinatorial aspects of continued fractions. *Discrete Mathematics*, 32 :125–161, 1980.

[58] Philippe Flajolet. Analytic models and ambiguity of context–free languages. *Theoretical Computer Science*, 49 :283–309, 1987.

[59] Philippe Flajolet. Singularity analysis and asymptotics of Bernoulli sums. *Theoretical Computer Science*, 215(1-2) :371–381, 1999.

[60] Philippe Flajolet. Excursion generating functions are algebraic. Preprint, mars 1998.

[61] Philippe Flajolet, Danièle Gardy, and Loÿs Thimonier. Birthday paradox, coupon collectors, caching algorithms and self-organizing search. *Discrete Applied Mathematics*, 39(3) :207–229, 1992.

[62] Philippe Flajolet, Donald Ervin Knuth, and Boris Pittel. The first cycles in an evolving graph. *Discrete Mathematics*, 75 :167–215, 1989.

[63] Philippe Flajolet and Guy Louchard. Analytic variations on the Airy distribution. Technical Report TR-01-15, Alcom-FT Project, 2001. (To appear in *Algorithmica*, Special Issue on Analysis of Algorithms 2002 ; 16p.).

[64] Philippe Flajolet and Andrew Michael Odlyzko. The average height of binary trees and other simple trees. *Journal of Computer and System Sciences*, 25(2) :171–213, 1982.

[65] Philippe Flajolet and Andrew Michael Odlyzko. Limit distributions for coefficients of iterates of polynomials with applications to combinatorial enumerations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 96(2) :237–253, 1984.

[66] Philippe Flajolet and Andrew Michael Odlyzko. Singularity analysis of generating functions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 3(2) :216–240, 1990.

[67] Philippe Flajolet, Patricio Poblete, and Alfredo Viola. On the analysis of linear probing hashing. *Algorithmica*, 22(4) :490–515, 1998.

[68] Philippe Flajolet, Bruno Salvy, and Gilles Schaeffer. Airy phenomena and analytic combinatorics of connected graphs. Research report, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 2001. In preparation.

[69] Philippe Flajolet and René Schott. Non–overlapping partitions, continued fractions, Bessel functions and a divergent series. *European Journal of Combinatorics*, 11 :421–432, 1990.

[70] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick. *Analytic Combinatorics.* 2001.

[71] Philippe Flajolet and Michèle Soria. General combinatorial schemas : Gaussian limit distributions and exponential tails. *Discrete Mathematics*, 114 :159–180, 1993.

[72] Dominique Foata. *La série génératrice exponentielle dans les problèmes d'énumération.* S.M.S. Montreal University Press, 1974.

[73] Dominique Foata, Guoniu Han, and Bodo Lass. Les nombres hyperharmoniques et la fratrie du collectionneur de vignettes. *to be published*, 2001. 21 pages.

[74] Harry Furstenberg. Algebraic functions over finite fields. *Journal of Algebra*, 7 :271–277, 1967.

[75] Francis Galton and Henry William Watson. On the probability of the extinction of families. *J. Roy. Anthropol. Inst.*, 4 :138–144, 1874. http ://www.mugu.com/galton/.

[76] Zhicheng Gao and Nicholas Charles Wormald. The size of the largest components in random planar maps. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 12(2) :217–228 (electronic), 1999.

[77] Danièle Gardy. Some results on the asymptotic behaviour of coefficients of large powers of functions. *Discrete Mathematics*, 139(1-3) :189–217, 1995.

[78] Danièle Gardy. Dynamical urn model revisited. In *The Sixth Seminar on the Analysis of Algorithms, Gdansk*, June 2000.

[79] Ian P. Goulden and David M. Jackson. *Combinatorial Enumeration.* John Wiley, New York, 1983.

[80] Dominique Gouyou-Beauchamps and Gérard Viennot. Equivalence of the two-dimensional directed animal problem to a one-dimensional path problem. *Advances in Applied Mathematics*, 9(3) :334–357, 1988.

[81] Godfrey Harold Hardy. *Ramanujan : Twelve Lectures on Subjects Suggested by his Life and Work.* Chelsea Publishing Company, New-York, third edition, 1978. Reprinted and Corrected from the First Edition, Cambridge, 1940.

[82] Hsien-Kuei Hwang. *Théorèmes limites pour les structures combinatoires et les fonctions arithmetiques.* PhD thesis, École Polytechnique, 1994.

[83] Svante Janson, Donald Ervin Knuth, Tomasz Łuczak, and Boris Pittel. The birth of the giant component. *Random Structures & Algorithms*, 4(3) :233–358, 1993.

[84] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Springer-Verlag, 1995.

[85] Donald Ervin Knuth. *The Art of Computer Programming*, volume 1. Addison-Wesley, third edition, 1997.

[86] Donald Ervin Knuth. Linear probing and graphs. *Algorithmica*, 22(4) :561–568, 1998.

[87] Valentin Fedorovich Kolchin. *Random Graphs*, volume 53 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1999.

[88] Darla Kremer. Permutations with forbidden subsequences and a generalized Schröder number. *Discrete Mathematics*, 218(1-3) :121–130, 2000.

[89] Jacques Labelle and Yeong-Nan Yeh. Dyck paths of knights moves. *Discrete Applied Mathematics*, 24 :213–221, 1989.

[90] Jacques Labelle and Yeong-Nan Yeh. Generalized Dyck paths. *Discrete Mathematics*, 82 :1–6, 1990.

[91] Leonard Lipshitz. The diagonal of a D-finite power series is D-finite. *Journal of Algebra*, 113 :373–378, 1988.

[92] Valery A. Liskovets. A pattern of asymptotic vertex valency distributions in planar maps. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 75(1) :116–133, 1999.

[93] Guy Louchard. The Brownian excursion area : a numerical analysis. *Computers & Mathematics with Applications. An International Journal*, 10(6) :413–417 (1985), 1984.

[94] Amram Meir and John W. Moon. On the altitude of nodes in random trees. *Canadian Journal of Mathematics*, 30 :997–1015, 1978.

[95] Donatella Merlini. A generating tree approach to schedule printing devices. In *The Sixth Seminar on the Analysis of Algorithms, Gdansk*, June 2000.

[96] Donatella Merlini, Renzo Sprugnoli, and Maria Cecilia Verri. The area determined by underdiagonal lattice paths. In *Trees in algebra and programming—CAAP '96 (Linköping, 1996)*, pages 59–71. Springer, Berlin, 1996.

[97] Donatella Merlini, Renzo Sprugnoli, and Maria Cecilia Verri. An algebra for generating trees. In *Mathematics and computer science (Versailles, 2000)*, pages 127–139, Basel, 2000. Birkhäuser.

[98] Sri Gopal Mohanty. *Lattice path counting and applications*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1979. Probability and Mathematical Statistics.

[99] Tadepalli Venkata Narayana. *Lattice path combinatorics with statistical applications*. University of Toronto Press, Toronto, Ont., 1979.

[100] Harmindar B. Nath. Waiting time in the coupon-collector's problem. *Austral. J. Statist.*, 15 :132–135, 1973.

[101] Andrew Michael Odlyzko. Asymptotic enumeration methods. In R. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, editors, *Handbook of Combinatorics*, volume II, pages 1063–1229. Elsevier, Amsterdam, 1995.

[102] Robin Pemantle. Generating functions with high-order poles are nearly polynomial. In *Mathematics and computer science (Versailles, 2000)*, pages 305–321. Birkhäuser, Basel, 2000.

[103] Elisa Pergola and Renzo Pinzani. A combinatorial interpretation of the area of Schröder paths. *Electronic Journal of Combinatorics*, 6(1) :Research Paper 40, 13 pp. (electronic), 1999.

[104] Elisa Pergola, Renzo Pinzani, and Simone Rinaldi. Towards an algebra of succession rules. In *Mathematics and computer science (Versailles, 2000)*, pages 141–152, Basel, 2000. Birkhäuser.

[105] Marko Petkovšek. The irrational chess knight. In *Proceedings of FPSAC'98*, pages 513–522, Toronto, 1998.

[106] Renzo Pinzani. Exposé au séminaire algorithmes, avril 1998.

[107] Thomas Prellberg. Uniform q-series asymptotics for staircase polygons. *Journal of Physics A : Math. Gen.*, 28 :1289–1304, 1995.

[108] Olivier Ramaré. On Šnirel'man's constant. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV*, 22(4) :645–706, 1995.

[109] Paulo Ribenboim. *The little book of big primes*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[110] Lawrence Bruce Richmond and Nicholas Charles Wormald. Almost all maps are asymmetric. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 63(1) :1–7, 1995.

[111] Gilles Schaeffer. *Conjugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 1998.

[112] Gilles Schaeffer. Random sampling of large planar maps and convex polyhedra. In *Proceedings of the thirty-first annual ACM symposium on theory of computing (STOC'99)*, pages 760–769, Atlanta, Georgia, may 1999. ACM press.

[113] Neil J. A. Sloane and Simon Plouffe. *The Encyclopedia of Integer Sequences*. Academic Press Inc., New York, 1995.

[114] Michèle Soria-Cousineau. *Méthodes d'analyse pour les constructions combinatoires et les algorithmes*. Doctorate in sciences, Université de Paris–Sud, Orsay, July 1990.

[115] Richard Peter Stanley. Differentiably finite power series. *European Journal of Combinatorics*, 1 :175–188, 1980.

[116] Richard Peter Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.

[117] Dietrich Stauffer. *Introduction to Percolation Theory*. Taylor & Francis, 1992.

[118] Robert A. Sulanke. Moments of generalized Motzkin paths. *Journal of Integer Sequences*, 3 :Article 00.1.1, 1 HTML document (electronic), 2000.

[119] Lajos Takacs. A Bernoulli excursion and its various applications. *Advances in Applied Probability*, 23 :557–585, 1991.

[120] William Thomas Tutte. A census of planar maps. *Canad. J. Math.*, 15 :249–271, 1963.

[121] William Thomas Tutte. Planar enumeration. In *Graph theory and combinatorics (Cambridge, 1983)*, pages 315–319. Academic Press, London, 1984.

[122] Hermann von Schelling. Coupon collecting for unequal probabilities. *Amer. Math. Monthly*, 61 :306–311, 1954.

[123] George Neville Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Reprint of the second (1944) edition.

[124] Julian West. Generating trees and the Catalan and Schröder numbers. *Discrete Mathematics*, 146 :247–262, 1995.

[125] Julian West. Generating trees and forbidden subsequences. *Discrete Mathematics*, 157 :363–374, 1996.

[126] Edmund Taylor Whittaker and George Neville Watson. *A Course of Modern Analysis.* Cambridge University Press, fourth edition, 1927. Reprinted 1996.

[127] Jet Wimp and Doron Zeilberger. Resurrecting the asymptotics of linear recurrences. *Journal of Mathematical Analsis and Applications*, 111 :162–176, 1985.

[128] Roderick Wong. *Asymptotic Approximations of Integrals.* Academic Press, 1989.

[129] Vladimir Mikhaĭlovich Zolotarev. *One-dimensional stable distributions.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1986. Translated from the Russian by H. H. McFaden, Translation edited by Ben Silver.

Index