Le tour des mathématiques en 80 points
ou
Problèmes d'hier, d'aujourd'hui et de demain

Cyril Banderier

Author address:

CHAPITRE 1

Prolégomènes

Que ceux qui s'effraient déjà quant à la lecture de quelques pages mathématisantes soient d'ores et déjà rassurés : en effet ce dossier n'est pas un texte de mathématiques mais plutôt une chronique *sur* les mathématiques et, en cela, il ne nécessite aucune connaissance, prédisposition ou acuité particulière.

En revanche l'auteur n'hésitera pas, lorsqu'il estimera que cela ne nuit pas à la lecture de ce dossier, à citer des théorèmes, moult problèmes avec des énoncés au vocabulaire plus ou moins rigoureux. Effectivement, le but n'est pas tant la compréhension formelle qu'une certaine culture générale. A l'adage italien " Traduttore, traditore ", nous substituons l'aphorisme suivant : " Vulgarisateur, menteur ", espérant incidemment démontrer par cet ouvrage l'utilité de la trahison et du mensonge. Même en mathématique, il faut savoir transiger...

Par ailleurs, puisque *Redde Caesari quae sunt Caesaris*, nous ne rechignerons pas à citer les noms des auteurs d'une démonstration, et puisque *redde quae sunt Dei Deo*, louons le Seigneur d'avoir inventé les barres de céréales chocolatées, si tant est qu'il y ait de bonnes choses sur Terre.

Il est clair que l'un des principaux reproches que l'on puisse faire à ce dossier est sa conception 'modulaire', c'est-à-dire une longue liste de résultats indigestes et sans rapport les uns avec les autres (bien sûr j'en rajoute) ; mais celle-ci présente l'avantage de permettre une lecture 'apéritif' : on vient, on prend ce que l'on veut, si c'est bon, on en reprend et, de toute façon, il n'y en aura jamais assez pour couper la faim...

Mais brisons là, carrez-vous bien dans votre fauteuil préféré, éloignez les importuns et laissez-vous bercer par le doux murmure des mathématiques.

Table des matières

CHAPITRE 2

Les origines des mathématiques

[7],[10],[14],[15] et [17] [1]

Comme on peut le remarquer dans [11] p.38, la partie la plus 'populaire' (popularisée ou enseignée) des mathématiques est le calcul. Toutefois il faut distinguer mathématiques et calcul : si le deuxième n'est que purement mécanique (donc accessible aux machines), les premières sont, à l'origine, une réflexion (donc moins 'mécanisable', cf p. ? ? ? : informatique) sur le calcul et sur les structures qu'il utilise. Si l'on devait utiliser une métaphore, on pourrait affirmer que la mathématique est un arbre, aux racines multiples et profondes, aux branches toutes aussi nombreuses, dont quelques unes sont en plein développement, d'autres en dépérissement mais qui peut-être donneront de merveilleux bourgeons dans quelques années et dont certaines ont besoin d'un débroussaillage. Le principal inconvénient de cette image est de ne pas montrer les abondantes interactions entre les différentes branches... Mais penchons-nous d'abord sur les racines :

1. De -4000 à -2000 en Mésopotamie

[7] et [17]

Il est désormais usuel de situer la naissance des mathématiques dans la Mésopotamie et l'Égypte ancienne, ce qui coïncide justement avec l'apparition des premières citées : en effet, celles-ci ont besoin d'une administration et une administration efficace a besoin de mathématiques. Les Babyloniens comptaient en base 60, le choix d'une telle base est dû au fait que 60 possède beaucoup de diviseurs (2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 et 30) alors que 10, par exemple, n'a que 2 et 5 comme diviseurs. Une base avec de nombreux diviseurs permet de faciliter l'expression des sous-multiples. C'est d'ailleurs par héritage des Babyloniens que nous avons 1 minute = 60 secondes, 1 heure = 60 minutes, un tour de cercle = 360 degrés (360 est multiple de la base 60) et que, dans ma campagne natale, on parle d' “ une douzaine d'oeufs ” (car 12 est un sous-multiple de 60). Certains pourraient objecter : mais il est plus facile de compter sur ses doigts en base dix ! Certes, mais il est également facile de compter sur ses doigts en base 60. Il suffit pour cela de considérer les douze phalanges de la main gauche (on ne compte pas le pouce) et de les compter avec les doigts de la main droite. Vous avez ainsi les 5*12=60 chiffres... Cette civilisation connaissait nos quatre opérations (+, -,

[1] [n] indique l'énième référence bibliographique

*, /). Les divisions étaient faites à partir de table d'inverses. De même, l'extraction de racines carrées était faite à partir de table de carrés. Ils savaient résoudre une équation du second degré et connaissaient les formules classiques d'aires et de volumes simples (en utilisant la valeur 3 pour π).

2. De -2000 à -500 en Égypte

[7], [10] et [17]

La plus importante source de renseignement, découverte par l'anglais Rhind, s'appelle en sa mémoire le Papyrus Rhind. On sait donc que les égyptiens utilisaient les chiffres hiéroglyphiques suivants, qu'ils répétaient 9 fois si nécessaire.

1 : (barre verticale) ; 10 : (anse du panier parce qu'on y met dix oeufs) ;

100 : (car une corde enroulée = 100 pas) ; 1000 : (fleur de lotus car il y en a des milliers au bord du Nil) ; 10 000 : (doigt levé) 100 000 : (têtard) ; 1 000 000 : (divinité qui lève les bras vers des millions d'étoiles). Vous me pardonnerez mon égyptien hésitant, mais j'ai toujours été nul en écriture. Pour en revenir aux égyptiens, les seuls autres nombres qu'ils utilisaient étaient fractions du type $1/n$ et $2/3$, toutes les autres fractions étaient donc décomposées en somme de telles fractions, ce qui n'était pas une mince affaire (voir p.14)... Ils utilisaient la valeur $\frac{4^4}{3^4} \sim 3,16$ pour π.

3. De -500 à +300 en Grèce

Les marchands grecs, durant leurs pérégrinations, réalisèrent un pot-pourri des différentes mathématiques qu'ils trouvèrent et cela les incita à avoir un certain recul, à réfléchir. Les grecs furent les premiers à raisonner sur une figure. Leur point de vue était purement géométrique. Ils adoraient les problèmes de construction à la règle et au compas dont quelques-uns étaient insolubles car certains nombres, irrationnels ou transcendants ne sont pas ainsi constructibles (voir p. ? ? ?), mais les Grecs se refusaient à croire en de tels nombres car pour eux tout était commensurable, pouvait être mis sous la forme de rapport de longueur : “ Tout est nombre ” était la divise de l'école de Pythagore (400-480 av. JC) qui a d'ailleurs condamné à mort l'un des siens, pour avoir révélé que $\sqrt{2}$ (la diagonale du carré de côté 1) était incommensurable (irrationnel et donc n'était pas un nombre au sens où ils l'entendaient). En voici la démonstration que l'on trouve chez Euclide, c'est la célèbre démonstration par l'absurde du 'pair et de l'impair' : “ $\sqrt{2}$ rationnel $\Longleftrightarrow \sqrt{2} = a/b$ avec a et b entiers premiers entre eux $\Longleftrightarrow$ $2b^2 = a^2 \Longrightarrow a^2$ est divisible par 2 $\Longrightarrow a$ divisible par 2 $\Longrightarrow a^2$ était divisible par 4 $\Longrightarrow 2b^2$ divisible par 4 $\Longrightarrow b^2$ divisible par 2 $\Longrightarrow b$ divisible par 2. Si $\sqrt{2}$ était rationnel on aurait donc a et b divisibles par 2 alors qu'on les a supposés premiers entre eux, il y a donc une contradiction. D'où $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. ” Vers -300, Euclide (avec d'autres mathématiciens) écrit 13 livres, les *Éléments*, qui sont la base des mathématiques hypothético-déductives. Il y a une hypothèse puis démonstration rigoureuse, une 'preuve logique' établie à partir des théorèmes précédemment démontrés. Euclide avaient même réduit les fondements des mathématiques à quelques axiomes. Le cinquième " deux droites parallèles distinctes ne se coupent pas à l'infini " fut longtemps le sujet de controverse. Son acceptation est la marque de la géométrie euclidienne (voir p. ? ? ? : Bolyai).

4. De 200 à 1200 La transition indo-arabo-européenne

Puis les mathématiques migrèrent d'Alexandrie à Byzance, de Byzance à Bagdad où les voyageurs arabes rapportèrent des Indes les chiffres dits arabes, ainsi que le zéro. Je me dois de vous inciter à lire à ce sujet [10], qui démontre, scientifiquement, historiquement, matériellement, philosophiquement, ontologiquement, mathématiquement l'authenticité de cet origine.

L'auteur, Georges Ifrah s'était vu poser la question, un jour, par un de ses élèves : " Monsieur, d'où viennent les chiffres ? " Le moins que l'on puisse dire, c'est que son livre répond fort bien à la question. Puis, lorsque l'usage s'en fut répandu dans le monde islamique, ce furent les marchands italiens, comme Léonard de Pise (1170-1242), qui importèrent cet usage des chiffres arabes. Gerbert d'Aurillac (938-1003), le futur pape Sylvestre II, avait déjà introduit l'usage de petits jetons (*apices*) sur lesquels figuraient les chiffres arabes. Il y eut alors une longue opposition entre les algoristes (latinisation d'Al Khwarizmi (780-850), qui est le père de l'algèbre via son livre *Al djabr*), et les abacistes (ceux qui utilisaient des petites tablettes ou abaques sur lesquelles ils déposaient des petits cailloux ou *calculi*, d'où le mot calcul). Les algoristes, dont la technique était bien sûr plus performante finirent par l'emporter. La prochaine étape fut les notations de Viète (voir p.6).

CHAPITRE 3

Épimathématique

1. Le problème de la pédagogie en maths

[1], [2], [8] et [13]

Déjà faut-il parler de mathématique**s** ou de mathématique ? En fait, si vous prenez du recul et si vous trouvez que l'arbre dont on parlait précédemment forme un tout joli et cohérent, alors vous parlerez **de la** mathématique mais si vous n'y voyez qu'un ramassis de branches hétéroclites, alors vous parlerez **des** mathématiques.

Après la formalisation très rigoureuse de la mathématique par le groupe de mathématiciens Bourbaki, l'enseignement s'est vu par trop 'bourbakisé' dès les petites classes. C'est ce que dénoncèrent de nombreuses personnes dont Stella Baruk dans [2]. Elle y parle d'enfant 'automathe'. [8] cite une phrase de cette anti- Piaget : " Avec Pythagore à un bout, et Bourbaki à l'autre, la tradition est maintenue de l'enseignement-religion qui sacrifie le libre fonctionnement d'un entendement à la récitation d'un catéchisme formel et rituel, à la docilité, à la simulation du sens - ceci pendant que les grands prêtres se marrent dans leur coin. " Elle a par ailleurs proposé un dictionnaire accessible aux professeurs et aux élèves de collège pour remédier à de nombreux inconvénients [1]. Aujourd'hui, la querelle des maths modernes (*news maths* en anglais) semble éteinte. En fait le bourbakisme n'était surtout qu'une réponse parmi d'autre (dont [13]) à la crise des fondements qui menaça l'édifice mathématique au début du siècle et qui n'eut pas que de bonnes répercussions sur l'enseignement. Il demeure que les incontournables ouvrages mathématiques du groupe Bourbaki restent une référence au plus niveau.

2. Le problème de la vulgarisation en maths

[20]

" S'il était donné à chacun de comprendre les mathématiques de haut niveau, pourquoi seuls des mathématiciens professionnels feraient-ils des années d'études pour pouvoir s'intéresser à ces problèmes ? " Cette remarque semble sonner le glas de toute vulgarisation en mathématique et pourtant, l'astrophysique ou la physique des particules ne sont pas moins difficiles d'accès et sont pourtant parfaitement vulgarisées. Une réponse serait peut-être que les mathématiques ayant toujours le souci de la rigueur, de l'exactitude et de la vérité, elles ne peuvent tolérer la vulgarisation car celles-ci obligent à transiger, à mentir un petit peu pour rester accessible au lecteur qui n'est pas un spécialiste. C'est ainsi qu'il existe très peu d'ouvrages de vulgarisation qui n'ait pas pêché par trop de difficulté ou trop de simplicité. S'il me fallait citer des noms de personnes qui ont réussi ce pari, il y aurait les deux auteurs des rubriques mensuelles en logique informatique et en mathématiques de la revue *Pour la Science* : c'est-à-dire J.P. Delahaye et I. Stewart [20], les dignes successeurs de Martin Gardner, une référence surtout dans le domaine des " mathématiques amusantes ".

3. Les problèmes des mathématiques amusantes

Une autre façon de vulgariser les mathématiques est la forme du jeu, du problème mathématique. C'est ainsi, que dans de nombreuses revues scientifiques, on trouve désormais une page 'jeux mathématiques'. Mais il est encore plus frappant de voir le développement de jeux concours tels :

– Le championnat de France des jeux mathématiques et logiques (organisée par la Fédération Française des Jeux Mathématiques), celui-ci propose jusqu'à une dizaine de problèmes de difficulté croissante très accès sur la 'logique', pour lesquels il suffit d'indiquer une bonne réponse et le nombre de solutions totales (pas de démonstration), par exemple :

Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 1.
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 2.
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 3.
Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 4.

– Le Kangourou dont la recette a tellement bien marché en Australie que le pari fut pris en France, avec succès. Il s'agit d'un QCM (questionnaire à choix multiples), les candidats ont une seule croix à faire parmi trois cases, il faut être rapide et contrairement au championnat précédent, il y a des questions d'histoire des maths.

– Les différentes olympiades internationales.

– Les différents rallyes régionaux.

Par ailleurs, il existe de nombreux ouvrages de mathématiques divertissantes (à la médiathèque d'Évreux), mais souvent ceux-ci sont trop puérils ou bien du genre 'Testez votre QI', c'est dommage : il y encore des progrès à faire...

Un point positif sont les excellentes revues de mathématiques Tangente, Quadrature et Plot, dans des optiques différentes toutefois. (voir bibliographie)

4. La place des femmes en mathématiques

[7], [19], [9] et [2]

Poser le problème de la place des femmes en mathématiques, c'est poser le problème de la place des femmes dans les sciences et c'est donc poser le problème de la place des femmes dans la société (celle d'hier, d'aujourd'hui et de demain...), ce que nous ne pouvons nous permettre ici. En premier lieu je donnerai le chiffre suivant : 59en terminale scientifique (ne parlons pas de l'ancienne 'Terminale C' : 30elles sont 90que de nombreuses personnes et les pouvoirs publics s'intéressent à la question (commission Dacunha-Castelle, projet CEE, association 'Pour une éducation non sexiste'), je demeure sceptique quant à un rééquilibrage dans l'avenir tant le poids de la tradition pèse dans le milieu scolaire, les réformes n'y étant souvent que des coups d'épée dans l'eau. Je me révolte toujours d'entendre parler de ces refoulés misogynes dont les psychanalystes femmes accusent les profs de maths (et chaque homme en général) arguant alors d'un effet Pygmalion (l'élève se conforme à l'image que le professeur a de lui, d'elle) pour expliquer les faibles pourcentages de présence féminine en maths. Mais après tout, cette explication spécieuse me choque peut-être parce qu'elle recèle un fond de vérité ?

Parmi les femmes qui ont atteint la célébrité dans ce cercle fermé des mathématiques, citons :

(nous ne citerons pas ici de mathématiciennes n'étant en fait que femme, soeur, protectrice etc. d'un grand mathématicien et ayant ainsi collaboré ou traduit, comme Christine de Suède, la marquise du Chatelet, Madame Lalande, la duchesse du Gotta, Anne-Charlotte Leffler...)

4.1. HYPATIE (370-415). Cette mathématicienne et philosophe d'Alexandrie est à l'origine, avec son père Théon d'Alexandrie, d'une réédition critique des *Éléments* d'Euclide et d'un commentaire de l'*Almageste* de Ptolémée. Selon Suidas, elle aurait également commenté les *Arithmétiques* de Diophante et les *Coniques* d'Apollonios. Vers 400, elle fut à la tête de l'école néoplatonicienne. Elle fut lapidée par des chrétiens hostiles au savoir païen des grecs.

4.2. Maria Gaetane AGNESI (on trouve aussi : Agneli ou Agnelli) (1718-1799). Première femme géomètre à devenir professeur d'université à Bologne.

4.3. Sophie GERMAIN (1776-1831). Première mathématicienne autodidacte, dans la bibliothèque de son père qui fut député du Tiers-État, elle découvrit *L'Histoire des Mathématiques* de Montucla. Ces parents, inquiétés de cette passion à l'époque contre-nature eurent beau dans un premier temps freiner son enthousiasme, ils finirent par céder devant cette jeune fille qui se levait la nuit pour aller étudier les ouvrages de Bézout, Newton et Euler. Elle se débrouilla pour recevoir les notes des cours de l'École Polytechnique, fondée en 1795 et correspondit avec Lagrange sous le pseudonyme masculin de Leblanc. Elle finit par le rencontrer et commenca à être invitée à des dîners de savants (= d'hommes à l'époque). Elle se brouilla une fois avec Lalande, un vulgarisateur scientifique pour dames qui, comme Fontenelle dans *Entretiens sur la pluralité des mondes*, ou Algarotti dans le *Newtonianisme pour les Dames*, faisait passer la science par un jeu galant, car “ les femmes ne s'intéressent qu'à la galanterie et à l'amour ”, une belle marquise se voyant ainsi éduquée par le discours scientifique et badin de son savant interlocuteur. Je citerai un passage censé expliquer la loi des carrés de la distance valable pour la gravitation et la lumière : “ J'ai quelque tentation de croire que dans l'amour on suit cette loi des carrés à l'égard des lieux, ou plutôt à l'égard des temps : ainsi après 8 jours d'absence, la tendresse devient 64 fois moindre qu'elle ne l'était le premier jour. ” Convaincant, non ? Sophie n'apprécia guère qu'on lui indique un tel ouvrage pour femmes frivoles. Sophie vivait à l'écart de la société scientifique et bourgeoise, ce qui ne l'empêcha pas de faire de magnifiques découvertes en théorie des nombres, l'un des résultats les plus importants sur le théorème de Fermat et écrivit à Gauss sous le pseudonyme Leblanc “ craignant le ridicule attaché au nom de femme savante ”. Au moment de la campagne d'Iéna en 1806, Sophie s'inquiète pour Gauss se souvenant de la fin d'Archimède, elle dépêche un message à un général de ses amis. Son identité est dévoilée et Gauss lui écrit le 30 avril 1807 une magnifique lettre qui est tout à son honneur : “ Comment vous décrire mon admiration et mon étonnement, en voyant se métamorphoser mon correspondant estimé Mr Leblanc en cet illustre personnage qui donne un exemple aussi brillant de ce que j'aurais peine à croire. Le goût pour les sciences abstraites en général, et surtout pour les mystères des nombres, est fort rare : on ne s'en étonne pas, les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos moeurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles que de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces recherches épineuses, sait néanmoins franchir ces entraves et pénétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute qu'elle ait le plus noble courage, des talents tout à fait extraordinaires, le génie supérieur. [...] ”

Je tiens à signaler qu'il n'y avait point d'hypocrisie de sa part, comme le prouvent d'autres lettres qu'il a écrites à Olbers. D'ailleurs, le seul poste que Sophie Germain se verra attribuer, après d'autres travaux sur les surfaces élastiques, sera un poste à l'université de Göttingen (grâce à Gauss), mais il était trop tard : Sophie Germain venait de mourir d'un cancer du sein.

4.4. Sonia KOVALEVSKAÏA (1850-1891). Mathématicienne russe également amoureuse de la littérature, elle tenta plusieurs récits dont certains, qu'elle fit lire à son ami Dostoïevsky, influencèrent certainement ce dernier. Elle fit un mariage en blanc pour pouvoir partir étudier à l'étranger. Elle participa à la Commune de Paris. Elle connut les grands savants et intellectuels de son époque (Darwin, Ibsen, Mendeleïev, Tourgueniev...). Professeur à l'université de Stockholm en 1889. Trois mémoires novateurs présentés à l'université de Göttingen en 1874 : équations différentielles, intégrales abéliennes et sur la forme des anneaux de Saturne.

Un seul conseil : lisez son autobiographie *Souvenirs d'Enfance* et sa *Biographie* par A.C. Leffler [9].

D'autres jeunes femmes russes suivront son exemple mais il fallut attendre 1908 pour qu'une autre femme, Marie Curie (d'ailleurs récemment transférée au Panthéon), soit nommée professeur dans une université, 1933 pour qu'Emmy Noether soit professeur aux États-Unis et 1938 pour qu'une femme soit nommée professeur de mathématiques en France.

4.5. Emmy NOETHER (1882-1935). Fille du mathématicien allemand Max Noether, elle enseigna à l'université de Göttingen de 1922 à 1933, sans obtenir de poste, l'accès en étant interdit aux femmes. Juive, elle émigra aux États-Unis où elle obtint le succès qu'on connaît en algèbre (on parle d'anneau noetherien). Son rôle de premier plan dans la création de l'algèbre moderne lui fit même créer une école (Hasse, Krull, Shreier, Van der Waerden). D'elle, les mauvaises langues disaient 'LE Noether'.

CHAPITRE 4

Le tour du monde en quelques mathématiciens

[5], [6], [7], [17] et [19]

1. France

1.1. François VIÈTE (1540-1603). Créateur du calcul algébrique avec l'emploi de lettres (consonne pour une donnée, voyelle pour une inconnue). Il détermina les relations entre coefficients et racines des équations algébriques (dans le seul cas des racines positives). Donna à la trigonométrie sa forme définitive. Travaux en théorie de l'information. Auteur de la formule

$$\pi = 2\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$$

1.2. Pierre Simon de FERMAT (1601-1665). Créateur avec Pascal du calcul des probabilités. Précurseur du calcul différentiel et intégral. Résultats importants en théorie des nombres (voir p.18), sous forme épistolaire ou marginale, non toujours accompagnés de démonstration. On l'appelle parfois le 'prince des amateurs'.

1.3. Blaise PASCAL (1623-1662). Il a établi la relation entre les nombres de combinaisons et les coefficients binomiaux. Il a ramené les propriétés projectives des coniques aux propriétés métriques du cercle. Recherches sur la cycloïde. Travaux à la base du calcul intégral. Créateur avec Fermat du calcul des probabilités.

1.4. Jean le Rond d'ALEMBERT (1717-1783). Ce mathématiciens et philosophe des Lumières est l'un des fondateurs de l'analyse. Il essaya de démontrer que 'tout polynôme de degré n a n racines dans C', mais en vain, ceci est appelé en sa mémoire 'théorème de d'Alembert-Gauss'. En mécanique son nom subsiste via le 'dalembertien'. Mais il faut avoir lu la grande Encyclopédie de Diderot-d'Alembert à l'article 'dimension' pour comprendre celle de son génie : “ Un homme d'esprit de ma connaissance croit qu'on pourrait cependant regarder la durée comme une quatrième dimension, et que le produit du temps par la solidité ferait en quelque manière un produit de quatre dimensions ; cette idée peut être contestée mais elle a, ce me semble, quelque mérite quand ce ne serait que celui de la nouveauté. ” Il est plaisant de voir que l'idée était tellement nouvelle qu'il n'osait pas prétendre qu'elle venait de lui.

1.5. Pierre simon Marquis de LAPLACE (1749-1827). Cet astronome, mathématicien, physicien et homme politique travailla sur la réduction en formes quadratiques, les équations différentielles et aux dérivées partielles, les développements asymptotiques, le calcul des probabilités, la mécanique céleste. Voici son exposé classique du déterminisme : “ Une intelligence qui connaîtrait à un moment quelconque toutes les forces qui animent la Nature et les positions mutuelles de tous les objets qui la composent, si elle est assez puissante pour analyser toutes ces données, devrait pouvoir réduire en une formule unique aussi bien les mouvements des plus grands corps célestes que celui des plus petits atomes : pour cette intelligence rien ne serait incertain, l'avenir comme le passé serait présent sous ses yeux. ”

1.6. Baron Jean-Baptiste Joseph FOURIER (1768-1830). Ce bénédictin puis préfet français est connu par ses équations aux dérivées partielles, par la séparation des racines d'une équation algébrique. Il s'intéressa à la décomposition d'une fonction en une somme de sinusoïdes (les séries de Fourier). Une idée des plus prolifiques bien qu'il l'ait initialement appliquée à la théorie de la propagation de la chaleur alors que cette théorie ne vérifie pas en fait le modèle proposé par Fourier.

1.7. Baron Augustin Louis CAUCHY (1789-1857). Il a défini les notions de convergence et de continuité (sans toutefois distinguer la continuité ou la convergence simple de la continuité ou convergence uniforme). Donna un nouvel éclairage sur les nombres complexes et auteur de la théorie des fonctions 'monogènes' (= de variable complexe et dérivable en un point). Pour en savoir plus sur ce catholique royaliste qui retarda l'avancée de la théorie des groupes en 'égarant' les manuscrits d'Abel et de Galois (voir à ces noms) tout en demeurant toutefois un personnage attachant, je vous recommande la lecture de Bruno Belhoste, Cauchy : un mathématicien légitimiste au XIXe siècle, Belin, 1988, coll. 'un savant, une époque'.

1.8. Évariste GALOIS (1811-1832). Recalé à l'École polytechnique ; mis à la porte de l'École normale supérieure pour cause de barricades (en fait Galois avait accusé le directeur de s'être comporté comme un traître lors de la révolution de Juillet). Il a présenté 4 mémoires à l'Académie des sciences, les 2 premiers 'perdus' par Cauchy, un égaré à la mort de Fourier et le quatrième renvoyé par Poisson. A la suite des travaux d'Abel, il caractérisa les équations résolubles par radicaux, à l'aide des groupes de permutation et créa la théorie des groupes. Mathématicien romantique par excellence, il mourut comme Abel, très jeune : à 20 ans, lors de son duel du 30 mai, il reçût une balle dans l'abdomen. L'origine du duel est encore controversée. Galois, dans une lettre qu'il a écrite la nuit précédente, en incombe la faute à “ une infâme coquette ” que l'on a pu identifier : Stéphanie-Félicie Poterin du Motel dont le prénom apparaît souvent sur les marges des manuscrits de Galois. S'agissait-il d'un pari, d'une querelle entre soupirants, d'activistes politiques, d'un règlement de comptes entre gentilshommes ? Il se trouve que l'adversaire de Galois dans ce duel était Pescheux d'Herbinville, un républicain qui n'avait peut-être pas apprécié la plaisanterie de Galois, qui, lors du banquet du 9 mai 1831 où l'on fêtait l'acquittement de 19 officiers républicains (dont d'Herbinville), avait porté un toast au roi en s'écriant : " A Louis-Phillipe ! ", un verre et un couteau à la main. Galois prétendit plus tard avoir déclaré " A Louis-Phillipe, s'il trahit ! " mais que la fin fut noyé par les clameurs. L'historien Eric Temple Bell, qui avait une fâcheuse tendance à romancer ses biographies, est à l'origine de la légende selon laquelle Galois aurait écrit ses plus importants théorèmes sur la théorie des groupes la nuit précédant sa mort, en écrivant sans cesse " je n'ai pas le temps, je n'ai pas le temps ". En fait, cette inscription n'apparaît qu'une seule fois et est précédée de " Il y a quelque chose à compléter dans cette démonstration. " sur le manuscrit que Poisson avait renvoyé à Galois pour le compléter.

1.9. Charles HERMITE (1822-1901). Fonctions abéliennes, fonctions elliptiques. Fractions continuées (le terme 'fraction continue' est incorrect). Entiers algébriques. Équations diophantiennes linéaires. Réductions de formes quadratiques. Démonstration de la transcendance de e (1873), en utilisant la formule d'Euler $e^{i\pi} = -1$ Avec Cayley et Sylvester (voir p.8), représentations du groupe linéaire.

1.10. Marie Ennemond Camille JORDAN (1838-1922). Il a travaillé fondamentalement sur les groupes : premières études de la représentation des groupes, des groupes quotients, des groupes infinis, des groupes classiques. Recherche en analyse et en géométrie différentielle. Il en fait développé, reformulé et enseigné toute la théorie de Galois sur les groupes et la résolubilité d'une équation par radicaux. Il a inventé la notion d'homomorphisme, de groupe-quotient et de suite des sous-groupes distingués.

1.11. Jules Henri POINCARÉ (1854-1912). Équations différentielles et aux dérivées partielles, équations intégrales. En même temps qu'Élie Cartan, étude des formes différentielles extérieures et des invariants intégraux. Travaux très importants en physique mathématique et en philosophie des sciences. Ses idées qu'il rappèle dans son livre de philosophie ([18]) lui valut d'entrer en vive polémique avec Bertrand Russel qui était un défenseur du logicisme alors que Poincaré, qui fut l'inspirateur de Brouwer le père de l'intuitionisme ([13]), serait maintenant appelé un intuitioniste (voir p.9 : Kronecker). Intuitio**nn**isme est une orthographe également acceptée.

1.12. Henri Léon LEBESGUE (1875-1941). Fonction d'une variable réelle ou complexe. Travaux fondamentaux à la base des théories de l'intégration et de la mesure. Il améliora la notion d'intégrale élaborée par Riemann en découpant la surface dessinée par la courbe en petites bandelettes horizontales (et non pas verticales comme avant). Une intégrale si puissante permi de redévelopper la théorie des probabilités (essentiellement les probabilités faisant intervenir un nombre infini indénombrable d'événements et qui sont donc liées avec la théorie de la mesure et par conséquent avec la notion d'intégrale).

2. Belgique

2.1. Charles Jean Gustave Nicolas de LA VALLÉE-POUSSIN (1866-1962). Travaux sur l'intégration (il a démontré les théorèmes fondamentaux sur l'intégrale de Lebesgue, voir ci-dessus) et la fonction ζ de Riemann (voir p.19 : conjecture de Riemann). Il a établi en même temps qu'Hadamard la loi de raréfaction des nombres premiers. Ses résultats sont décisifs pour la théorie de l'approximation des fonctions par des séries algébriques ou trigonométriques. Son *Cours d'analyse infinitésimale*a marqué la pensée mathématique.

3. Angleterre

3.1. Sir Isaac NEWTON (1642-1727). Travaux fondamentaux en mécanique céleste : il a découvert la loi d'attraction universelle et en a déduit le mouvement des planètes. A partir de considérations cinématiques et des développements en séries, il a dégagé la notion de dérivée (les fonctions et les dérivées étant appelées par lui fluentes et fluxions), au moment même où Leibniz introduisait le concept de différentielle, ce qui a conduit à de vaines querelles d'antériorité sur des travaux non publiés. Le nom de Newton est resté attaché à la série du binôme, à des relations entre coefficients et racines d'une équation algébrique, à une méthode de résolution approchée des équations numériques (méthode dite aussi de la tangente). Travaux sur la classification des courbes.

3.2. James Joseph SYLVESTER (1814-1897). Créateur du *Quaterly Journal* (Londres, 1855) et de l'*American Journal of Mathematics* (Baltimore, 1878). Cet avocat developpa avec Cayley (1821-1895) les notions de matrice, de rang mais surtout la théorie des déterminants et celle des invariants. C'est à la même époque que deux autres célèbres mathématiciens anglais s'intèressent à la logique : Dodgson (plus connu sous le nom de Lewis Caroll (1832- 1898), l'auteur bègue d'*Alice au pays des merveilles*) et Boole (1815-1864), fondateur de la logique que l'on appelle en sa mémoire logique booléenne, qui trouva une application importante en informatique.

4. Écosse

4.1. John NAPIER (1550-1617). Ce baron de Merchiston est plus connu sous le nom de Neper. Ce théologien protestant a inventé un procédé de multiplication appelé 'Réglettes de Napier', qui débouchèrent sur l'ébauche d'une machine à calculer. Il est surtout l'inventeur des logarithmes, destinés à simplifier les calculs de trigonométrie sphérique alors essentiels pour l'astronomie et la navigation. Sa découverte permet en quelque sorte de transformer une multiplication en addition. On utilisait encore ses tables de logarithmes avant l'introduction des calculatrices. On parle en sa mémoire du logarithme népérien que l'on note ln ou Log.

5. Norvège

5.1. Niels Henrik ABEL (1802-1829). Il étudia la convergence des séries entières, les intégrales, l'inversion des fonctions elliptiques... Il démontra l'impossibilité de résoudre par radicaux une équation du cinquième degré. Auteur de la notion de polynômes irréductible sur un corps. Son *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes* (1826) fut perdu par Cauchy et retrouvé en 1841. Sa vie est étrangement analogue à celle de Galois (voir p.7). Il me faut vous recommander l'excellente biographie d'Oystein Ore, Belin, 1989, coll.'un savant une époque'.

6. Suède

6.1. Magnus Gösta MITTAG-LEFFLER (1846-1927). Ce mathématicien travailla sur les fonctions analytiques et fut un rival (j'espère que tout le monde a compris ce doux euphémisme) heureux de Nobel. C'est pour cette raison que celui-ci, rancunier, ne créa pas de prix Nobel de mathématique. Mittag-Leffler créa la revue Acta mathematica et fut un ardent défenseur de l'émancipation féminine, de la bouche de sa soeur, grande amie de Sonia Kovalevskaïa. L'orthographe Lefler pour Leffler est incorrecte tout comme Bezout pour Bézout ou Bernouilli pour Bernoulli et Leibnitz pour Leibniz.

7. Suisse

7.1. Les BERNOULLI. Cette famille de mathématiciens a résidé à Bâle.Parmi les plus célèbres, citons : Jakob (1654-1705) : Travailla aux équations différentielles, aux propriétés métriques des courbes, au calcul des probabilités. Lui sont dus les nombres, polynômes, variable et lemniscate de Bernoulli. Johann (1667-1748) frère de Jakob, analyste émérite rivalisant avec Leibniz sur l'intégration des fonctions rationnelles, travailla sur les fonctions transcendantes et les géodésiques. Daniel (1700-1782) fils de Johann, ce professeur de médecine, de métaphysique et de philosophie naturelle travailla sur les équations différentielles et aux dérivées partielles. Toucha également à la mécanique céleste, aux probabilités, à la statistique et à l'hydrodynamique. C'est ainsi que les étudiants en mécanique des fluides croisent souvent son nom.

7.2. Leonhard EULER (1707-1783). Un des plus grands mathématiciens de tous les temps, et le plus prolifique : ses oeuvres remplissent 80 in- quarto. Doué d'une mémoire prodigieuse, il a pu continuer à travailler après la perte de la vue, vers 1768. Créateur de l'analyse, il a contribué à *tous* les domaines mathématiques et mécaniques de son époque. On lui doit les notations des fonctions transcendantes élémentaires, ainsi que la notation e pour le nombre de Neper. Il a favorisé l'adaptation de la lettre π (notation due à William Jones en 1706) pour le nombre d'Archimède et inventé la notation (qui sera reprise par Gauss, l'inventeur du mot 'nombre complexe') i pour le nombre imaginaire $\sqrt{-1}$. Le mot 'imaginaire' était de Descartes.

8. Allemagne

8.1. Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (Leibnitz) (1646-1716). Ce philosophe et homme d'affaire étudia les opérations de différenciation et d'intégration (ou, plus exactement de primitivation). Il est donc le créateur du calcul infinitésimal en même temps que Newton et indépendamment de lui. Sa notion d'infiniment petit a trouvé un renouveau après 1950 avec l' “ analyse non standard ” de Robinson. Auteur des symboles ∂ et $\int$ (initiale du mot latin *summa*), ainsi que des termes coordonnée et axe de coordonnée. Travaux en mécanique et sur la numération binaire. La plupart de ses travaux ne furent pas publiés de son temps.

8.2. Carl Friedrich GAUSS (1777-1855). Surnommé le 'prince des mathématiciens', il fait partie des plus grands génies de tous les temps, à l'instar d'Archimède, de Newton ou d'Einstein. Puisque je sais que vous aimez les anecdotes je vais vous en compter 2 sur Gauss : à 3 ans, en regardant son père calculer le salaire des ouvriers, le jeune enfant l'observe attentivement et lui déclare “ Père, ce résultat est faux, ce doit être... ” Vérification faite, le petit Carl avait raison et personne ne lui avait appris à compter ! Une anecdote plus crédible est celle qui prétend qu'à 10 ans, le petit Friedrich réussit l'exploit suivant : dans la classe d'arithmétique, le maître avait demandé d'additionner tous les nombres de 1 à 100. Gauss apporte rapidement son ardoise au maître qui la pose sur sa table sans la regarder. Une heure après, les autres élèves ont tous finis et le maître s'aperçoit alors que le résultat de Gauss était correct (Gauss se plaisait par la suite à dire que c'était le seul correct). Le maître offrit alors un livre d'arithmétique à Gauss qui le dévora. Un jeune passionné de mathématique, Bartels, lui donna des cours privé et déjà Gauss critiqua le manque de rigueur, dans le livre offert, d'une démonstration (théorème du binôme qui développe (1+x)n en série) et la refit lui-même. Il prouvait ainsi qu'il n'était pas qu'un super-calculateur mais aussi un esprit capable d'abstraction. Citons les domaines qu'il a créés sinon développés : théorie des nombres (congruences), équations cyclotomiques, formes quadratiques, théorème fondamental de l'algèbre (voir p.6 : d'Alembert), séries hypergéométriques, géométrie différentielle des surfaces, probabilités... Il travailla même à la géométrie non- euclidienne mais ne publia pas ces travaux (voir p.10 : Bolyai).

8.3. Leopold KRONECKER (1823-1891). Cet ancien banquier, une fois mathématicien s'intéressa aux fonctions elliptiques. Contribution fondamentale à la théorie des nombres algébriques. En même temps que Weierstrass, il a introduit la définition actuelle des déterminants. Auteur des produits tensoriels. Intuitioniste comme Brouwer, il refusait tout recours au principe du tiers exclu et dénigrait tout principe d'existence non constructif et donc à l'existence de l'“ infini actuel ”. C'est pour ces raisons qu'il s'opposa intensément à Cantor. Ce dernier déclarait à propos de ses découvertes sur l'infini : “ Je le vois mais je n'y crois pas ”.

8.4. Georg Friedrich Bernard RIEMANN (1826-1866). Malgré sa vie brève, l'un des plus grands mathématiciens de son siècle. Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques. Résultats sur les intégrales abéliennes. Auteur d'une géométrie non-euclidienne. Il a étendu la géométrie différentielle à l'espace numérique Étude de la répartition des nombres premiers grâce à l'introduction de la fonction ζ. Son nom est resté attaché à une définition de l'intégrale, généralisant celle de Cauchy, mais ne présentant plus qu'un intérêt historique. Les recherches de Riemann ont été à la base de la topologie, de la géométrie différentielle...

8.5. Julius Wilhelm Richard DEDEKIND (1831-1916). Cet élève de Gauss, de Dirichlet et de Riemann donna une définition axiomatique des entiers naturels et construisit l'ensemble des nombres réels à partir de la notion de 'coupures'. Auteur de la notion d'idéal d'un anneau (en améliorant la notion de nombres idéaux de Kummer, Dedekind réussit à conserver l'unicité de la décomposition en facteurs premiers pour des ensembles ayant une structure plus générale que l'ensemble des entiers). Il contribua donc fondamentalement à la théorie algébrique des nombres et à l'arithmétique et jetta les bases de la théorie des ensembles, de par sa correspondance avec Cantor.

8.6. Felix KLEIN (1849-1925). Groupes finis, équations différentielles, fonctions elliptiques. Il est surtout connu pour avoir révolutionné la conception de la géométrie via le 'programme d'Erlangen', leçon inaugurale qu'il donna en 1872 en définissant synthétiquement diverses géométries : “ Il se pose la question générale que voici : étant donnés une multiplicité et un groupe, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe... ce que l'on peut exprimer ainsi : on donne une multiplicité et un groupe de transformations ; développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe... Si on remplace le groupe principal par un groupe plus étendu, une partie seulement des propriétés géométriques est conservée... Les méthodes géométriques modernes sont caractérisées par le fait que leurs considérations, au lieu de s'appuyer sur le groupe principal, reposent sur des groupes de transformations plus étendus. Dès que leurs groupes se contiennent l'un l'autre, une loi analogue établit leurs rapports réciproques... Pour la première fois, les divers ordres de recherche de la géométrie sont exprimés par les groupes de transformations qui leur correspondent. ” Si j'avais assisté à cette conférence, j'aurais capté que nib et vous ? Tout ce que je vois, c'est que c'est bien là une conception de la géométrie bien éloignée de celle que l'on en a en classe de quatrième.

8.7. David HILBERT (1862-1943). Chef de file de l'école allemande durant un tiers de siècle, il a joué un rôle fondamental dans l'évolution de nombreuses branches des mathématiques. Ses premiers travaux ont porté sur la théorie des invariants, conduisant aux idéaux de polynômes. Recherches en théorie des nombres (voir p.13 : Waring) puis en théorie des variations. A propos des équations intégrales, il introduit les espaces de fonctions et de suites de carrés sommables (1904), ce qui l'a amené à créer la théorie spectrale des espaces hermitiens. Son étude critique des fondements de la géométrie, en dehors de son intérêt historique, a sonné le glas des axiomes d'Euclide. Il a consacré sa retraite (prise en 1930) à l'étude des fondements des mathématiques (voir p.16 : paradoxe des catalogues). Enfin son nom reste attaché à 23 problèmes mathématiques qu'il a posés au congrès international de Paris en 1900, et dont certains ne sont toujours pas résolus.

8.8. Hermann MINKOWSKI (1864-1909). Travaux en théorie des nombres et sur les parties convexes de l'espace numérique Rn. A la demande de son ancien élève Albert Einstein, il formule la relativité restreinte à l'aide d'un espace vectoriel de dimension 4 sur R, muni d'une forme quadratique de signature (3,1), à savoir $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. C'est le célèbre 'espace- temps'. (voir p.6 : d'Alembert).

9. Hongrie

9.1. Janos BOLYAI (1802-1860). Fils de Farkas Bolyai (1775-1856), il continua l'oeuvre de son père qui tenta de démontrer le postulat des parallèles d'Euclide, puis s'apercevant que son père avait fait fausse route, il construisit une géométrie cohérente dans laquelle le cinquième axiome n'était pas vérifié. Ses découvertes parvinrent à Gauss en 1832. Celui-ci dès 1792 y avait songé et en 1815, il laissa clairement entendre dans ses écrits qu'il pouvait exister une géométrie ne vérifiant pas l'axiome des parallèles, tout en ayant une cohérence interne. Étant donné l'habituelle réserve de Gauss dans ses révélations, cette affirmation suggère qu'il en possédât quelques preuves. Peut-être est-ce parce que ses vues allaient à l'encontre de celles de ses contemporains qu'il décida de les taire. Gauss écrivit donc à Bolyai père qu'il ne pouvait en faire l'éloge car cela eut été équivalent à louer un travail qu'il avait fait lui-même 30 ans auparavant. Bolyai fils fut profondément meurtri par la remarque de Gauss et sa solution d'un ancien problème d'une importance énorme ne fut reconnue qu'après sa mort. C'était le début des géométries non-euclidiennes dont Lobachevski et Riemann allaient faire l'étude plus en profondeur.

10. Russie

10.1. Georg Ferdinand Ludwig Philipp CANTOR (1845-1918). Ses travaux sur les séries trigonométriques le menèrent aux bases de la théorie des ordinaux transfinis et en démontrant, à l'aide des nombres transcendants, que R n'est pas dénombrable, il créa la théorie des ordinaux. En approfondissant ces deux thèmes, Cantor aboutit en 1882 à la théorie des ensembles. La mutation des mathématiques qui en est résulté (les maths dites 'modernes') n'avait donc pour objet que d'étayer les théories précédemment établies et non de faire de l'abstraction de façon gratuite. Victime de l'incompréhension de ses contemporains, Cantor est mort interné dans un hôpital psychiatrique.

11. Inde

11.1. Srinivasa RAMANUJAN (1887-1920). Mathématicien prodige dont on vient de finir de comprendre et démontrer des milliers de formules. Hardy (1877-1947) et Littlewood (1885-1977) étaient à l'époque les deux meilleurs mathématiciens anglais et mondiaux de la théorie analytique des nombres (voir p.19 : conjecture de Riemann). Or, en 1913, Hardy crut à une plaisanterie lorsqu'il se vit envoyer, par un obscur employé indien, une lettre couverte de symboles mathématiques. Puis il tenta de s'y retrouver dans ces formules complètement folles, y reconnu des formules qu'il avait déjà démontrées, tenta de démontrer quelques autres mais au prix d'un grand effort. Les autres formules étaient tellement 'inouïes' qu'Hardy compris qu'il avait plus de chance d'avoir affaire à un génie inconnu qu'à un charlatan de talent. Ce fut le début d'une collaboration féconde (Hardy faisant venir Ramanujan avec lui à Trinity College) mais courte car Ramanujan qui était végétarien décéda en 1920 d'une carence en vitamines. Ramanujan travailla essentiellement sur la théorie des nombres, ses formules, très algorithmiques trouvent un nouvel usage aujourd'hui avec l'ordinateur.

12. Japon

12.1. Takebe KATAHIRO (1664-1739). Travailla en trigonométrie et en calcul numérique.

13. Grèce

13.1. ARCHIMÈDE (287-212 av. JC). Il calcula une valeur de p à partir d'un encadrement du cercle par polygones. Auteur de la notion du centre de gravité. Il effectua les premiers calculs de type intégral. Le roi Hiéron lui avait demandé de vérifier si sa couronne était bien toute en or sans l'endommager. C'est dans son bain qu'Archimède trouva la solution, le principe qui porte maintenant son nom : 'Tout corps plongé dans l'eau reçoit une poussé verticale égale au poids du volume d'eau déplacé', il sortit tout nu de son bain en s'écriant " Eurêka ! " (J'ai trouvé !). Lors de la prise de Syracuse, alors que Marcellus avait ordonné qu'on l'épargnât, il est mort assassiné par un soldat romain énervé de n'obtenir aucune réponse de cet homme absorbé dans un problème.

14. Canada

14.1. John Charles FIELDS (1863-1932). Vu la non-existence d'un prix Nobel de mathématiques, J.C. Fields a proposé au congrès international de Toronto en 1924 d'attribuer lors de chaque congrès deux médailles d'or. La proposition fut acceptée par le congrès de Zurich en 1936. Les 2 premières médailles furent attribuées en 1936 au congrès d'Oslo. Le nombre de lauréat à chaque congrès est actuellement de 4. Ceux-ci sont désignés par un jury de 8 personnes choisies entre deux congrès par le comité exécutif de l'Union internationale de mathématiques mais la composition est tenue secrète jusqu'à la remise des médailles.

Les lauréats, qui doivent avoir théoriquement moins de 40 ans, reçoivent la 'médaille Fields' : au recto l'effigie d'Archimède et au verso une sphère inscrite dans un cylindre. Dans la liste suivante des 39 médaillés (il n'y a pas encore de médaillée), les sept français sont en italique. Il y a en outre 12 américains, 5 anglais, 4 russes, 3 japonais, 2 belges, suivent l'Allemagne, l'Italie, la Nouvelle-Zélande, la Norvège et la Suède avec chacune un médaillé.

1936	Oslo	Ahlfors L. & Douglas J. (USA)
1950	Harvard	*Schwartz L.* (Fr) & Selberg A. (Norvège)
1954	Amsterdam	Kodaira K. (Japon) & *Serre J.-P.* (Fr)
1958	Edimbourg	Roth K. (GB) & *Thom R.* (Fr)
1962	Stockholm	Hörmander L. (Suède) & Milnor J. (USA)
1966	Moscou	Atiyah H. (GB) & Cohen P.(USA) & *Grothendiek A.* (Fr) & Smale S. (USA)
1970	Nice	Baker A. (GB) & Hironida H.(Japon) & Novikov S. (URSS) & Thompson J. (GB)
1974	Vancouver	Bombieri E. (Italie) & Mumford D. (USA)
1978	Helsinki	Deligne P.(Belgique) & Fefferman C. (USA) & Margoullis A.(URSS) & Quillen D. (USA)
1982	Varsovie	*Connes A. (Fr)* & Thurston W.P. (USA) & Shing Tung-Yau (USA) & Tarjan R.
1986	Berkeley	Faltings G. (RFA) & Freedman M.(USA) & Donaldson S. (GB)
1990	Kyoto	Drinfeld V. (URSS) & Jones V.F.R. (N-Zél) & Mori S. (Japon) & Witten E. (USA)
1994	Zurich	*Yoccoz J.C.* (Fr) & Bourgain J. (Belgique) & *Lions P. L.* (Fr) & Zelmanov E. (Russie)

15. États-Unis

15.1. Janos von NEUMANN (1903-1957). Il a obtenu des résultats essentiels dans de très nombreuses branches des mathématiques pures et appliquées. Il a traité la mécanique quantique dans le cadre des espaces hilbertiens ; il a contribué à la conception de la bombe H. Il a défini la logique des calculateurs électroniques... En collaboration avec O. Morgenstern, il a écrit un traité devenu classique Théorie des jeux. Il est le principal instigateur de l'informatique moderne.

CHAPITRE 5

Les mathématiques et l'informatique

[3], [4], [5], [10], [12] et [16]

Le mariage a fort bien pris depuis les travaux de Neumann. Non seulement, l'ordinateur par sa puissance de calcul (la 'brute-force') a permis de vérifier de nombreux théorèmes qui auraient nécessité des calculs trop fastidieux pour des humains (théorie des nombres, théorie des graphes). Mais l'informatique permet maintenant d'aider grandement la recherche par le biais de logiciels de calcul symbolique et formel (les CALSYF) tels Derive, Maple, Mathematica et Mathcad. Les mathématiques jouent aussi un rôle en informatique via la protection (codage) des données, les codes secrets de notre siècle sont basés sur la théorie des nombres : en effet nous ne savons toujours pas comment défaire rapidement une multiplication (c'est-à-dire factoriser) si nous n'avons pas quelques renseignements sur les facteurs, les codages informatiques utilisent donc des nombres de plusieurs centaines de chiffres et aucun ordinateur ne serait actuellement capable de déchiffrer rapidement un message ainsi codé. Seul l'expéditeur et le destinataire du message sont en possession d'un petit renseignement supplémentaire qui leur permet de déchiffrer en un temps raisonnable les messages qu'ils s'envoient. Il faut noter que le cryptage de données est interdit en France alors qu'il est autorisé aux États- Unis, en fait les gouvernements ont du mal à supporter que certaines informations leur soient inaccessibles (les cartels mafieux tout comme les banques communiquent par le biais d'un tel cryptage).

Par ailleurs, nous ne sommes pas encore parvenus, malgré les énormes progrès en intelligence artificielle, à créer un logiciel qui ait réussi à démontrer (trouver) de nouveaux théorèmes, les seuls théorèmes découverts n'étant que des redécouvertes (souvent des théorèmes de géométrie élémentaire).

.

Un autre intérêt de l'ordinateur est une meilleure visualisation des données, c'est dans ce cadre que s'inscrit toute l'imagerie de synthèse et la théorie du chaos : nous sommes désormais envahi d'images fractales (que ce soit dans des simulations de paysages ou des concerts de musique 'techno'). C'est le français d'origine polonaise Szolem Mandelbrojt qui est le père de la théorie des fractals, la fractale (image dont les motifs se répètent infiniment à des échelles différentes) de gauche est appellée en sa mémoire la 'Mandelbrojt'. L'image ci-contre est issue de l'une des plus belles oeuvres qui existe sur PC : le logiciel Fractint (générateur d'images fractales), qui est le fruit d'une collaboration internationale et bénévole de centaines de passionnés. Il est à espérer que les futures 'inforoutes' facilitent et développent ce genre de travail, gratifiant pour l'humanité. Le mariage ordinateur-mathématique a ainsi apporté un renouveau dans l'art après les oeuvres mathématisantes du cubisme, de Maurits Cornelis Escher (1898-1972) ou d'Anatoli Fomenko ; la beauté des fractales et des images de synthèses en attire plus d'un (cf le succès du salon Imagina).

CHAPITRE 6

Quelques problèmes célèbres

[3], [5], [12], [18]

1. La duplication du cube

Le problème de la duplication du cube ou 'le problème déliaque' remonte au VI^e siècle av. JC. “ L'oracle de Délos avait ordonné aux habitants de cette ville de doubler le volume d'un de ses autels. ” Ceci, dans un langage moderne, correspond à multiplier par $2^{1/3}$ la longueur du côté de l'autel. Or comme les géomètres grecs n'utilisaient que la règle et le compas et accédaient au nombre par un équivalent géométrique, ils ne réussirent pas à résoudre ce problème. Jusqu'au XIXe siècle, de nombreux mathématiciens inventèrent divers outils pour essayer de résoudre ce problème, toutefois infructueusement. Ils tentèrent souvent d'utiliser des courbes auxiliaires (qu'on appela donc 'duplicatrices'), c'est le cas par exemple de la cissoïde de Dioclès ou de la conchoïde de Nicomède.

Ce n'est qu'en 1837 que Wantzel, à partir des travaux d'Abel, démontra que “ tout nombre constructible à la règle et au compas est solution d'un polynôme à coefficients entiers et de degré une puissance de deux (par exemple de degré 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64...). ” Or est solution de $x^3 - 2 = 0$ qui est certes un polynôme à coefficients entiers mais dont le degré n'est pas une puissance de deux. C'est pour cette raison qu'aujourd'hui encore 'un problème déliaque' est synonyme d'un problème impossible à résoudre.

2. La quadrature du cercle

Le problème de la quadrature du cercle, de la cubature de la sphère et de la rectification de la circonférence sont équivalents. “ Est-il possible, à la règle et au compas, de construire un carré qui ait même aire qu'un cercle donné ? ” “ Est-il possible, à la règle et au compas, de construire un cube qui ait même volume qu'une sphère ? ” “ Est-il possible de tracer, à la règle et au compas, un segment de longueur égale au périmètre d'un cercle ? ” Voici trois questions qui reviennent à pouvoir construire un segment de longueur π à partir d'un segment de longueur 1, aidé uniquement de la règle et du compas. Or si ceci était possible, cela signifierait que π serait un nombre constructible, donc d'après le théorème de Wantzel (1837), π serait alors racine d'un certain polynôme. Il se trouve qu'en 1882, Lindemann (1852-1939), un mathématicien allemand des universités de Koenigsberg et Munich, montra que π n'était racine d'aucun polynôme : on dit que π est un nombre transcendant. La transcendance de π apportait ainsi une réponse définitive au plus célèbre des problèmes mathématiques. La quadrature du cercle était bel et bien impossible, mais le langage courant n'avait pas attendu la démonstration pour donner le sens de 'problème insoluble' à cette expression. En effet déjà au V^e siècle av. JC, Anaxagore de Clazomènes l'écrivait. L'Académie des Sciences décida même en 1775 de rejeter tous les dossiers qui concernaient cette épineuse question : outre les mémoires de mathématiciens, de trop nombreux amateurs croyaient (et croient toujours) trouver une solution au problème ! Il est aussi intéressant de remarquer que ce problème qui est à l'origine purement géométrique ne fut résolu qu'avec des notions poussées d'algèbre pour Wantzel et d'analyse pour Lindemann.

3. La trisection de l'angle

Les Grecs savaient à la règle et au compas, tracer la bissectrice d'un segment mais c'est en vain qu'ils cherchèrent à partager, dans le cas général, un angle en trois angles égaux. Pour résoudre ce 'problème de la trisection de l'angle', les mathématiciens tentèrent d'utiliser des courbes auxiliaires que l'on nomma alors 'trisectrices' comme la spirale d'Archimède, la cubique de l'Hospital, la conchoïde de Nicomède, le limaçon de Pascal, la cubique de Tschirhausen... C'est une fois de plus le théorème de Wantzel qui permit de résoudre en 1837 ce problème. Toutefois, il existe quelques valeurs pour laquelle la trisection est possible (l'angle plat, l'angle droit...) mais elle demeure impossible dans le cas général, par exemple pour un angle de 60 degrés.

4. L'empilement des sphères (1611)

Kepler posa le problème suivant : “ Comment empiler de sphères de même diamètre pour en ranger le maximum dans un espace limité ? ” La solution optimale est l'empilement en 'boulets de canon' (trois sphères sur lesquelles repose une sphère). La densité de cet empilement est de $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$. Conjecturé depuis l'origine, ce résultat ne fut démontré (?) que récemment par Wu-Yi Hsiang, de l'université de Californie. Sa démonstration de 1991 comportait plus de 100 pages, mais des experts (Muder D., Conway J.H., Sloane N. et Hales T.) ont jugé celle-ci trop peu rigoureuse, la qualifiant de 'série de conjectures'. La polémique fut rude aux États-Unis et on attend encore d'autres démonstrations (avis ?) pour confirmer le résultat.

5. Les 13 boules

“ Peut-on entourer une boule B avec 13 autres boules de même taille de façon que toute touchent B ? ”

Newton a montré que c'est possible avec 12 boules et en 1952 Van der Waerden et Schütte montrèrent l'impossibilité avec 13 boules.

6. Le retournement de la sphère

“ Est-il possible de déformer une sphère d'une telle façon que sa face intérieure devienne sa face extérieure et que sa face extérieure devienne sa face intérieure ? ” Ici la déformation n'autorise ni les déchirures ni les coupures mais elle permet l'interpénétration. Il est alors effectivement possible de retourner une sphère comme cela le fut montré en 1958 par Stephen Smale.

7. Le problème de Waring (1770)

“ Soit n en entier naturel, combien faut-il additionner de carrés, de puissances k-ièmes pour obtenir n ? ” Edward Waring (1734-1798) a conjecturé en 1770, que pour tout nombre, 2 carrés ou 4 cubes ou 19 puissances quatrièmes ou un nombre fini $g(k)$ de puissances k-ièmes suffisent. Ce qui est vrai : la formule de Vinogradov donne $g(k) = 2^k - 2 + [(3/2)^k]$.

Il est intéressant de connaître les étapes importantes de la résolution de ce problème :

$g(2) = 4$, théorème de Lagrange dit 'des quatre carrés' ((1780) ;
$g(3) = 9$, Wieferich 1909 ;
$g(k)$ existe pour tout k mais on ne sait toujours pas le calculer, Hilbert 1909 ;
Vinogradov trouve et démontre sa formule pour $k > 5$ ((1930) ;
$g(5) = 37$ Chen 1964 ;
$g(4) = 19$ Balasubramanian, Deshouillers et Dress 1985.

La formule de Vinogradov était donc vérifiée pour tout entier k et le problème résolu, notons une importante aide de l'ordinateur pour le cas $k = 4$.

Toutefois les recherches continuent : jusqu'à quel point pourrait-on faire mieux ? C'est à dire trouver des valeurs $g(k)$ encore plus petites, éventuellement, en acceptant des entiers négatifs, ou en éléminant les cas pathologiques des petits nombres. Par exemple, on sait que pour $k = 4$, on peut descendre jusqu'à 16 pour des entiers suffisamment grands. Par ailleurs, on pense que tout entier est somme de 4 cubes (éventuellement négatifs).

8. L'algorithme de Syracuse (1930)

Il est également appelé parfois 'algorithme de Hasse' ou 'problème de Collatz' ou 'problème d'Ulam' ou 'problème $3n+1$'. “ Prenez un entier n, s'il est pair prenez $n/2$ et s'il est impair prenez $3n+1$; puis recommencez avec ce nouveau nombre. ” Il semble qu'au bout d'un certain on parvienne toujours à 1. Ce problème fut inventé par Lothar Collatz lorsqu'il était étudiant à Hambourg en 1930, puis diffusé par son collègue Hasse à l'université de Syracuse aux USA, puis relancé en 1960 par Kakutani. La grande simplicité de son énoncé suscita alors l'intérêt de nombreux chercheurs dans plusieurs centres américains ; pendant des mois, ils s'y attaquèrent mais en vain. A l'époque courait cette plaisanterie que le problème avait été inventé par les russes à la seule fin d'entraver les progrès des mathématiques aux États-Unis en accaparant l'attention des chercheurs.

9. Le problème d'Alhazen (1010)

Sans doute plus connu sous le nom de 'problème du billard circulaire'. " Dans quelle direction faut-il lancer une bille placée en un point A sur un billard circulaire pour qu'elle repasse par le point A après deux réflexions successives ? "

10. L'aiguille de Buffon (1750)

" Sur du papier à lettre avec lignes préinscrites, l'espace entre les lignes étant d'une longueur d, quelle est la probabilité pour qu'une aiguille de longueur $l \leq d$ tombant au hasard sur votre papier à lettre coupe l'une des lignes ? " La réponse est : $\frac{2l}{\pi d}$.

11. Le problème de Didon

" Didon était la princesse de Tyr, on l'appelait aussi Elissa. Une fois reine, son mari est assassiné (le bonheur est toujours de courte durée) et elle fuit vers l'Afrique en compagnie de nobles familles. En abordant les côtes de ce qui deviendra Carthage, elle demande aux indigènes " autant de terre que peut en contenir la peau d'un boeuf " Elle découpa alors la peau du boeuf en de lamelles si fines qu'elle obtint une longueur suffisante pour entourer l'espace sur lequel elle fonda a ville. " Elle anticipa ainsi sur un résultat de J. Bernoulli selon lequel le cercle est la figure qui, pour un périmètre donné, a la surface la plus grande.

12. Le problème de Dirichlet

Il consiste à " déterminer une 'fonction harmonique' (une fonction dont la somme des dérivés partielles est nulle) à l'intérieur d'un domaine (c'est-à-dire une partie de l'espace en un seul tenant) en ne connaissant que le comportement de cette fonction à la frontière de ce domaine. " Lorsque cela est possible, il n'y a qu'une seule solution. Dans la pratique celle-ci est souvent déterminée par la méthode de Monte-Carlo (appelée ainsi par référence au casino de Monte-Carlo : cette méthode consiste à rechercher des solutions au 'hasard').

13. Les problèmes du triangle

Le problème d'Euler : Il s'agit tout bonnement de " construire un triangle en ne connaissant que le centre I de son cercle inscrit, son centre de gravité G et son orthocentre H. "

Le problème de Fagnano : " Quel est le triangle IJK de périmètre minimum inscrit le triangle acutangle (i.e. 'qui n'a que des angles aigus') ABC ? " La réponse est le triangle orthique de ABC, c'est-à-dire le triangle IJK où I, J et K sont les pieds des hauteurs du triangle ABC.

Le problème de Fermat : " Dans un triangle ABC, trouver un point M rendant minimale la longueur $AM + BM + CM$. ". Le point M est appelé point de Fermat et c'est en fait le point d'intersection des droites AA', BB' et CC' où ABC', $AB'C$ et $A'BC$ sont des triangles équilatéraux construits sur les côtés du triangle ABC.

Le problème de Leibniz : " Diviser un triangle en quatre parties de même aire par deux droites perpendiculaires. "

Le problème de Malfatti : " Inscrire dans un triangle 3 cercles tangents entre eux deux à deux et tangents chacun à deux côtés du triangle. "

14. Le problème de Greenspan (1950)

" Est-il possible, dans l'espace, de déformer un cercle de façon à ce que trois points quelconques de la courbe fermée ainsi obtenue ne soient jamais alignés et de façon à ce que quatre points quelconques ne soient jamais sur un cercle ? "

Le problème des méléniennes Le mot 'ménélienne' provient de Ménélaüs d'Alexandrie. " Soit un triangle d'aire $3S$. Il existe une partie du triangle dans laquelle ne passe aucune des droites qui partagent ce triangle en une partie d'aire S et une partie d'aire $2S$. " Ceci fut démontré par V.E. Hoggatt Jr en 1962.

15. Le problème de Napoléon-Mascheroni (1800)

Il est désormais connu que Napoléon n'a pas laissé son nom que dans l'Histoire. Voici un exemple de 'divertissement géométrique' qui porte son nom :

" Construire le centre d'un cercle donné uniquement à l'aide d'un compas et en un nombre fini d'opérations. " Voici la réponse minimale en six arcs de cercle, essayez donc ! 1. A partir d'un point A quelconque du cercle, tracer un arc de rayon quelconque, vous obtenez alors deux points d'intersection B et C.
2. Tracer un arc de cercle de centre C et de rayon AB.
3. Tracer un arc de cercle de centre B et de rayon AB, soit D le point d'intersection de ces deux arcs de cercle.
4. Tracer un arc de cercle de centre D et de rayon DA, on obtient les points d'intersections E et F.
5. Tracer un arc de cercle de centre E et de rayon EA.
6. Tracer un arc de cercle de centre F et de rayon EA, le point d'intersection de ces 2 arcs de cercle est le centre du cercle.

16. La partition d'une surface

" En combien de parties peut-on partager une surface de façon à ce que chaque partie touche chacune des autres ? " La réponse est 4 pour le plan et la sphère, 7 pour le tore (c'est-à-dire un pneu). Ce nombre ne change pas si l'on déforme légèrement la surface (par 'homéomorphisme'), c'est ce qu'on appelle un invariant topologique. Les experts du coloriage auront reconnu les nombres chromatiques, mais ce n'est en fait qu'une 'coïncidence'.

17. Le problème de Sierpinski (1960)

“ L'équation $(x + y + z)^3 = xyz$ a-t-elle une solution entière ? ” En 1960, Waclaw Sierpinski a énuméré plus d'une quarantaine de problèmes de ce genre.

18. Le voyageur de commerce

“ Un voyageur de commerce doit se rendre dans plusieurs localités. Quel est la route la plus courte à prendre pour qu'il ne passe qu'une fois et une seule dans chacune de ces localités. ” Ce problème de la théorie des graphes défit toujours les informaticiens. Ceux-ci supposent par ailleurs qu'il n'existe pas d'algorithme pour résoudre ce problème dans le cas général.

19. Les timbres-poste

Aussi appelé 'problème de l'échange de monnaie', il a été étudié par Frobenius.

“ Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ des entiers positifs (premiers entre eux), trouver le plus grand entier qui ne puisse s'écrire $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ où $x_1, \ldots, x_n$ sont des entiers positifs. ” Pour $n = 2$, Sylvester a montré que c'était $(a_1 - 1)(a_2 - 1) - 1$. Pour $n = 3$, le problème a été résolu en 1978. L'appellation 'problème de l'échange de monnaie' ou 'problème des timbres-poste' provient de l'équivalence de ce problème avec par exemple, la question suivante : “ Quelle est la plus grande somme que vous ne puissiez payer avec des pièces de 1,2 et 5 francs ? ”

20. Les fractions égyptiennes

Puisque les égyptiens n'utilisaient que des fractions 'inverses d'entiers', il s'agit de “ mettre une fraction sous la forme d'une somme finie d'inverses d'entiers. ” Le mathématicien américain Erdös, parmi ses nombreuses conjectures, a d'ailleurs émis la suivante : “ pour tout entier n, il existe des entiers a, b et c tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ”

21. Le pliage des timbres-poste

“ Combien y a-t-il de façon de plier une bande de n timbres-poste suivant les lignes de séparations perforées ? ” Ce problème a son équivalent en deux dimensions avec des cartes routières.

22. Le problème des n-corps

Dès Newton, les règles de la mécanique astronomique, il s'agit de savoir " comment évoluerait un système de n corps en ne connaissant que leur position d'origine. " Le cas $n = 2$ étant 'simple' et le cas $n = 4$ étant trop difficile, historiquement, ce fut surtout le problème des trois corps qui intéressa les mathématiciens. La mise en équation des mouvements du Soleil, de la Terre et de la Lune (qui se ramène à 9 petites équations) résista aux mathématiciens les plus chevronnés jusqu'en 1913 lorsque Sundmann découvrit une méthode très lourde. Ce n'est que l'ordinateur qui permit d'appliquer cette méthode en mécanique newtonienne. En relativité générale et pour $n > 3$, nous en sommes toujours réduits à des hypothèses simplificatrices...

23. Le coloriqge des cartes

Aussi connu comme 'problème des quatre couleurs'. " Quel est le nombre minimal de couleurs nécessaire pour colorier une carte de façons à ce que deux régions adjacentes quelconques aient des couleurs différentes ? " Ce nombre est appelé nombre chromatique de la surface. Sachant que c est la 'caractéristique d'Euler-Poincaré' de la surface, à savoir :
$c = n - m + f$ pour un polyèdre à n sommets, m arêtes et f faces ;
$c = 2 - 2p - q - r$ pour une sphère à p anses et q bonnets croisés et percée r fois.
Heawood avait conjecturé que ce nombre était égal à $\lfloor\frac{7+\sqrt{49-24c}}{2}\rfloor$où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière de x. Sa conjecture est fausse pour la bouteille de Klein (bouteille obtenue en allongeant le col d'une bouteille de vin vers la droite, puis en faisant passer le col rallongé à travers un côté de la bouteille, puis en raccordant alors le col rallongé avec le fond de la bouteille), qui peut être coloriée avec 6 couleurs (et non pas 7 comme la formule d'Heawood le supposait puisque $c = 0$ pour la bouteille de Klein). Il a été démontré en 1968 par Ringel et Youngs que la conjecture d'Heawood était vraie pour toutes les autres surfaces, à l'exception du plan et de la sphère. Or c'est justement pour ces deux surfaces, dont on supposait depuis longtemps que quatre couleurs suffisaient, que le problème avait été posé par Cayley en 1879. Il fallut attendre mon premier anniversaire (c'est-à-dire 1976) pour que Appel et Haken montrent après 1200 heures de calcul sur ordinateur que 4 couleurs suffisaient bel et bien. Les mathématiciens n'eurent qu'une seule déception : cette démonstration n'eut pas de répercussion sur la théorie des graphes autre que de donner une réponse à ce célèbre problème.

24. La mesure universelle

Vous pouvez partager un segment en $n$parties telles que :
1. aucune des n parties n'a une longueur nulle.
2. quand vous mesurez la longueur de la réunion de 2 parties, vous obtenez le même résultat que si vous additionniez la longueur de ces deux parties.

3. deux parties identiques (c'est-à-dire symétrique...) ont la même longueur.

De même pour un plan, on peut trouver une façon de mesurer, que nous noterons m, (par exemple l'idée intuitive d'aire) telle que pour toute partie A finie du plan
1. $m(A) \neq 0$. 2. $m(BunionC) = m(B) + m(C)$ pour deux parties de A disjointes 3. $m(A) = m(B)$ si une translation ou une rotation permet de déduire la partie B de la partie A.

Hausdorff posa alors la question " Pour un espace de dimension n, peut-on toujours trouver une telle mesure ? "

La réponse est oui pour $n = 1$ et $n = 2$ mais non pour $n > 2$. Ce résultat, très surprenant, est à l'origine de divers paradoxes, dont celui célèbre de Banach-Tarski (cf p.16).

25. Le parallélépipède rectangle pythagoricien

" Parmi les parallélépipèdes rectangles dont toutes les faces ont des côtés et des diagonales de longueurs entières, en existe-t-il dont la diagonale ait aussi une longueur entière ? "

26. Les sept ponts de Koenigsberg

La ville de Koenigsberg (Kaliningrad), traversée par la Prégel, possédait sept ponts disposés comme sur le schéma de gauche." Un piéton peut-il passer chaque pont et une fois et une seule ? " Ce problème, ancêtre de la topologie et de la théorie des graphes fut résolu par Euler : 'un graphe est eulérien si le nombre de ses sommets de degré impair est 0 ou 2', ce qui n'est pas le cas ici.

Depuis, les habitants ont résolu le problème en construisant un huitième pont !

27. Les trois puits et des trois maisons

" Peut-on relier chacune des trois maisons à chacun des trois puits par des chemins qui ne se coupent pas ? " La réponse est non pour un plan ou une sphère mais oui pour le tore. Sur le schéma de gauche, on voit bien que le dernier chemin (en pointillé) qui relierait la première maison au troisième puits est obligé de couper un des chemins précédents.

Il existe de nombreux autres problèmes célèbres comme le problème de Cauchy qui concerne un système d'équations différentielles, le problème de Dini-Riemann qui concerne la mécanique des fluides (via la détermination d'une 'fonction harmonique'), celui de Pappus, celui de Slusse qui concernent la géométrie élémentaire, le problème de Plateau, de Sturm-Liouville qui ont trait aux équations différentielles, le problème de Terquem et celui de Carmichaël qui traitent de dénombrement.

CHAPITRE 7

Quelques paradoxes célèbres

[13],[3],[20] et [18]

1. Le paradoxe de Banach-Tarski

Il s'agit en fait d'un théorème dont la version intuitive revient à affirmer que vous pouvez découper deux cadavres en morceaux d'une telle façon qu'avec les morceaux du premier cadavre vous reconstituez le deuxième macchabée et vice-versa. Plus mathématiquement : " 2 ensembles bornés d'un espace de dimension ¿2 peuvent être décomposés en un nombre fini de parties disjointes telles que chacune des parties du premier ensemble peut être obtenue à partir d'une partie de l'autre ensemble par un déplacement dans l'espace. " Tout le paradoxe réside dans le fait qu'un 'déplacement de l'espace' dans des espaces de dimension¿2 ne correspond pas tout à fait à la notion intuitive que l'on en a : en effet, si dans le plan les déplacements sont limités aux rotations et aux translations, l'affaire se corse singulièrement dans l'espace. Pour aller au fond des choses, c'est une conséquence de l'impossibilité de définir une mesure universelle. Ce théorème est à tel point abstrait qu'il utilise l'axiome du choix, si tant est que des notions abstraites débouchent sur des résultats abstraits.

2. Le paradoxe du barbier

" Le barbier de mon village (Saint Sébastien) ne rase que tous les hommes du village (les sébamorsentins) qui ne se rasent pas eux-mêmes. Le barbier se rase-t-il ? "

Si oui, c'est donc un sébamorsentin qui se rase lui-même, et à ce titre il ne doit donc pas être rasé par le barbier, c'est-à-dire par lui-même, d'où une contradiction puisque nous avons supposé qu'il se rase. Sinon, c'est donc un sébamorsentin qui ne se rase pas lui-même, et à ce titre il doit donc être rasé par le barbier, c'est-à-dire par lui-même, d'où une contradiction puisque nous avons supposé qu'il ne se rase pas. On évite tout problème en posant que le barbier n'est pas un habitant du village. Les mathématiques, elles-aussi, ont leurs exclus pour raisons sociales.

3. Le paradoxe de Bertrand (1870)

" Prenons une corde d'un cercle au hasard, quelle est la probabilité qu'elle soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit ? " Il existe trois réponses différentes :

1/4 si l'on fixe d'abord au hasard le milieu de cette corde ;
1/2 si l'on fixe d'abord au hasard la distance 'centre du cercle'-'milieu de la corde' ;
1/3 si l'on fixe d'abord au hasard l'une des extrémités.

Ce paradoxe vient du fait, que dans les trois 'prendre une corde au hasard' a une acceptation différente et conduit mathématiquement à 3 probabilités différentes sur un même espace probabilisable. C'est ce genre de paradoxes qui incita Kolmogorov à redéfinir la notion de probabilité, par la 'probabilité d'un ensemble clairement explicité', le principal ennemi des probabilités étant 'les abus ou indétermination du langage'.

Le paradoxe des catalogues ou paradoxe (antinomie) de Russell :

“ La bibliothécaire de la BU d'Évreux décide de faire un catalogue C de tous les catalogues qui ne sont pas catalogués. Le nouveau catalogue C ainsi obtenu devra-t-il figurer dans ce catalogue C ? ” Plus mathématiquement, il s'exprime ainsi : “ Soit C la classe de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux- mêmes. Si C est un ensemble, on ne peut pas répondre à la question : 'C est-il un élément de C ?' ” Ce paradoxe prouve qu'une classe d'ensemble n'est pas nécessairement un ensemble. Il est à rapprocher du paradoxe du barbier : il fait parti de ce que Ramsey a appelé les antinomies logiques, à distinguer des antinomies sémantiques qui jouent sur un langage naïf (comme le paradoxe de Richard, cf p.17).

C'est à la suite de tels paradoxes que l'on a cherché à mieux axiomatiser la théorie des ensembles, qui est à la base des mathématiques, car elle contient en quelques sortes ses notions premières. Ainsi, le programme de Hilbert visait à un fondement solide de la mathématique postcantorienne.

Dans les années 20, Hilbert a en effet formulé un programme de recherche qui a donné une impulsion définitive aux recherches de logique mathématique. Ce programme consiste à asseoir la mathématique sur des bases inébranlables, en formalisant toute la partie de la mathématique classique qui fait appel à l'infini et en démontrant la consistance (= cohérence) du formalisme ainsi obtenu, en n'utilisant que des méthodes élémentaires, de nature combinatoire : les méthodes finitistes.

Ce 'formalisme' hilbertien déboucha sur les travaux de Gödel qui montra que, bien que l'on puisse ramener la cohérence des mathématiques à celle de l'arithmétique, on ne peut démontrer mathématiquement la consistance de l'arithmétique : pour ne pas avoir auto-référence, il faudrait en quelque sorte se placer 'au- dessus' des mathématiques pour démontrer leur consistance, mais alors il faudrait également montrer la consistance de la 'métamathématique' utilisée pour démontrer la consistance des maths etc. D'où l'impossibilité, c'est le célèbre **théorème d'incomplétude de Gödel**.

Ce dernier a aussi montré qu'il existait des formules dont on ne pouvait démontrer si elles étaient vraies ou fausses. Elles sont dites indécidables et l'on rajoute alors un axiome à la théorie fixant la véracité ou non de cette phrase. C'est par exemple le cas de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu. Cette dernière consiste à affirmer qu'il n'y a pas d'ensemble ayant plus d'éléments que l'ensemble des entiers et moins d'éléments que l'ensemble des réels. On sait désormais que si l'on rajoute cette hypothèse ou l'hypothèse contraire à notre théorie des ensembles, on obtient quelque chose de cohérent. La polémique fut toute fois rude jusqu'à ce que Cohen démontre en 1963 par la méthode dite du 'forcing' l'indécidabilité de cette hypothèse.

4. Le paradoxe du menteur

Paradoxe dû à Épiménide de Cnosse VI^e siècle av. JC : " Sachant qu'Épiménide le Crétois dit qu'il est en train de mentir, je vous pose la question : est-il en train de mentir ? " Si oui, il ment et lorsqu'il dit " Je suis en train de mentir. " ce n'est pas vrai, donc il n'est pas en train de mentir, or nous avons supposé qu'il mentait.

Sinon, il ne ment pas et lorsqu'il dit " Je suis en train de mentir. " c'est vrai or nous avons supposé qu'il ne mentait pas.

Ce paradoxe est dû à un mélange de logique et de langage courant, ce dont on doit toujours se méfier. Ici, plus particulièrement, il y a une définition auto-récurrente, ce qui est interdit en logique. De même, il serait malséant pour un dictionnaire d'utiliser le mot qu'il veut définir dans la définition même de ce mot.

5. Le paradoxe de Galilée (1600)

" Il y a autant de points sur un *grand* que sur un *petit* segment de droite. " Il faudra attendre Dedekind en 1872 et la théorie des ensembles (via les cardinaux infinis de Cantor) pour éclairer ce paradoxe.

6. Le paradoxe de Richard (1930)

Soit n l'entier naturel défini par " n est le plus petit entier que l'on ne peut pas définir par une phrase formée de moins de 100 mots français. " Or cette définition comprend 23 mots ! En fait, c'est le sens du mot 'définir' qui prend plusieurs significations : il appert ici que, pour éviter tout problème (en mathématique comme ailleurs), il est déconseillé de jouer à la girouette, un mot doit conserver la même signification tout le long d'un exposé.

7. Le roulement du cercle

" Lorsque, sur l'autoroute, une roue de votre voiture a effectué un tour complet, son centre O s'est déplacé d'une longueur égale à la circonférence de la roue. Durant le même temps, l'enjoliveur, solidaire de cette roue, a lui aussi effectué un tour complet, donc son centre O' s'est déplacé d'une longueur égale à celle de la circonférence de cet enjoliveur. Or comme l'enjoliveur est plus petit que la roue (c'est plus pratique pour rouler), la circonférence de l'enjoliveur est donc plus petite que celle de la roue et finalement la distance parcourue par le centre O' de l'enjoliveur est ainsi plus petite que celle parcouru par le centre O de la roue. Mais, comme $O = O'$, le point O a donc parcouru deux distances différentes en un même laps de temps ! ” Ce paradoxe qui semble être aussi vieux que la découverte de la roue, fut résolu par Galilée : il suffit pour cela de considérer les notions de roulement avec ou sans glissements. Le point O ne glisse pas sur la route, alors que le point O' lui 'glisse' bien sur la route : il était donc faut d'affirmer que “ donc son centre O' s'est déplacé d'une longueur égale à celle de la circonférence de cet enjoliveur. ”

8. Les paradoxes de Zénon d'Élée (V^e siècle av. JC)

Il s'agit de diverses applications de raisonnements pour le dénombrable qui tendent à prouver l'impossibilité du mouvement. “ Avant qu'un projectile puisse atteindre un point donné il doit d'abord traverser la moitié de cette distance ; avant qu'il puisse avoir la moitié, il doit avoir traversé le quart et ainsi de suite indéfiniment. ”
“ Si la tortue a de l'avance au départ sur Achille, celui-ci ne pourra jamais la rattraper quelle que soit sa rapidité ; car pendant qu'il court pour atteindre le point d'où est partie la tortue, celle-ci avance. ”
“ La flèche lancée est toujours immobile ; en effet tout corps est soit en mouvement, soit en repos ; et il est en repos quand il se trouve dans un espace égal à son volume ; or à chaque instant, la flèche se trouve dans un espace égal à son volume. ”
En fait, la notion de convergence (au sens où $1/2+1/4+1/8+1/16+\ldots$ converge vers 2) manquait aux Grecs pour leur permettre de réfuter les arguments de Zénon : on peut parcourir une somme infinie de petite distance en un temps fini. Tous ces paradoxes remirent longtemps en cause la divisibilité à l'infini de l'espace et du temps, qui aujourd'hui même peut être rejetée non plus par des arguments mathématiques mais par des arguments physiques : la théorie quantique ne repose-t-elle pas sur la non-divisibilité à l'infini ? Même si les quanta du XX^e siècle donnèrent des résultats fructueux, ne sont-ils pas, eux aussi, paradoxaux ? Ils sont les nouveaux atomes (les atomos ou 'indivisibles' au sens grec) et à ce titre soulèvent des questions passionnantes sur la 'réalité' et la compréhension d'une théorie.

Nous avons accepté cette théorie car elle permettait de résoudre de nombreux problèmes jusqu'alors inexplicables mais qu'a-t-elle de plus vraisemblable qu'une autre ? La physique, ces dernières années, se dirige bien vers une conception mathématique très abstraite (la théorie des champs) et délaisse la théorie de Bohr- Heisenberg qu'on apprend encore aux étudiants, pour combien de temps encore ? Je crois qu'une différence fondamentale entre la physique (ou la chimie) et les mathématiques se trouve justement dans le fait qu'un physicien tient à ce que sa théorie soit vérifiée par l'expérience (dans le monde réel, le 'concret', le 'tangible') alors que le mathématicien s'intéressera exclusivement aux conséquences de sa théorie qu'il considère comme une chose en soi, tout en s'intéressant toutefois parfois aux liens qu'elle peut avoir avec une autre théorie.

Si la physique est devenue abstraite, c'est essentiellement à cause de ses outils (qu'élaborent les mathématiciens), les pendants, une explication du monde réel et des éventuelles applications, seront toujours là pour justifier les excès (?) d'abstraction.

Il existe d'autres paradoxes célèbres comme le paradoxe de Poncelet et le paradoxe de Cramer qui concernent les courbes algébriques de degré n, le paradoxe de la sphère de Hausdorff qui concerne la topologie.

CHAPITRE 8

Quelques conjectures célèbres

[3], [18] et [20]

1. La conjecture de Bertrand (1840)

“ Pour tout $n > 1$, il existe un nombre premier strictement compris entre n et $2n$ ”. Cette conjecture a été démontrée en 1851 par Tchebychev qui montra, plus généralement, qu'en notant $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, on a :

$$0,9\frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq 1,2\frac{x}{\ln x}$$

pour $x \geq 30$.

2. La conjecture de Catalan (1845)

L'équation diophantienne $x^n - y^m$ =1 pour x, y, m et n entiers ¿1 n'a pas d'autre solution que 3,2,2 et 3. En fait, il a simplement été montré par Tijdeman que x^n et y^m sont majorés par $\exp(\exp(\exp(\exp 730)))$, ce qui implique que cette équation a un nombre fini de solutions et ce qui exclut par ailleurs l'usage d'un ordinateur car cette borne est bien trop grande encore.

3. La conjecture d'Euler (1740)

Il nous faut avant tout expliquer ce qu'est un carré latin d'ordre n : c'est une grille de $n \times n$ cases sur laquelle il s'agit de placer des symboles parmi un lot originaire de n symboles différents de façon à ce que chaque ligne et chaque colonne contiennent un représentant de chaque symbole.

Exemple :

1	2	3	4
4	3	2	1
3	1	4	2
2	4	1	3

Un carré gréco-latin est un carré latin qui mélange deux caractéristiques, par exemple :

1 rouge	2 bleu	3 vert	4 jaune
4 bleu	3 jaune	2 rouge	1 vert
3 vert	1 riuge	4 jaune	2 bleu
2 jaune	4 vert	1 bleu	3 rouge

La conjecture d'Euler affirmait qu'il n'existait pas de carrés gréco-latins d'ordre $2n$ avec n impair. Cette conjecture est en fait fausse. Avec l'aide de l'ordinateur, il a été montré qu'il existe des carrés gréco-latins de tous ordres sauf 2 et 6. Euler (prononcer [oilor]) avait été induit en erreur car il savait que le “ problème des 36 officiers ” n'admet pas de solution. Vous disposez de 6 régiments, avec, dans chacun, six officiers de grade différent ; il s'agit alors de les placer sur une grille de 6×6 cases de façon à ce que chaque rangée contienne un élément de chaque régiment et de chaque grade. Comme indiqué ci-dessus, c'est impossible, Euler avait alors trop facilement généralisé... Ci-contre *La mélancolie* de Dürer, avec un carré latin en arrière plan (pour ceux qui ont de bons yeux, et encore !).

4. La conjecture de Fermat (1640)

Il n'existe pas d'entiers non nuls tels que $x^n + y^n = z^n$ pour $n > 2$. Ce théorème, qui fut à la fois un moteur et la caractéristique, un état des lieux, des mathématiques, a été démontré en 1992 par Andrew Wiles, après une légère fausse piste.

Fermat a étudié les classiques de l'antiquité. Sur un exemplaire des *Arithmétiques* de Diophante, il fit de nombreuses notes dans la marge. Son fils les éditera en 1665. Celle qui nous intéresse était rédigée comme suit : “ Un cube n'est jamais la somme de deux cubes, une puissance quatrième n'est jamais la somme de deux puissances quatrièmes et plus généralement, aucune puissance supérieure à 2 n'est la somme de deux puissances analogues. J'ai trouvé une merveilleuse démonstration de cette proposition, mais je ne peux l'écrire dans cette marge car elle est trop longue. ”

C'est cette affirmation que l'on a appelé le grand (ou dernier) théorème Fermat et qui fit et continue à faire couler tant d'encre.

La conjecture de Fortune :

Dans [3], que chacun se devrait d'avoir s'il n'était pas si cher, je fis la découverte d'une fort curieuse conjecture... R.F. Fortune, anthropologue américain, a en effet découvert qu'en notant pn l'énième nombre premier, on a : $p_1 + 1 = 2 + 1 = 3$ qui est premier, $p_1 p_2 + 1 = 2.3 + 1 = 7$ qui est premier, $p_1 p_2 p_3 + 1 = 2.3.5 + 1 = 31$qui est premier, $p_1 p_2 p_3 p_4 + 1 = 2.3.5.7 + 1 = 211$ qui est premier, $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + 1 = 2.3.5.7.11 + 1 = 2311$ qui est premier, d'où sa conjecture : $\forall n \geq 1 f_n = p_1 \dots p_n + 1$ est un nombre premier.

Toutefois, ayant personnellement lu qu' “ on ne connaît pas de formule *utilisable* permettant de trouver des nombres premiers arbitrairement grands ” [16], j'appliquai le doute méthodique de Descartes et m'amusai à vérifier ce qu'il en était pour f_6. Quelle ne fut ma surprise en voyant que : f6 = 30031 = 59.509 et n'est donc pas un nombre premier. La conjecture de Fortune est donc fausse et il est étonnant que personne ne s'en soit aperçu.

Moralité : il y a en a deux ; les anthropologues n'auraient-ils pas trop facilement tendance à généraliser ? Les mathématiciens n'ont-ils pas trop facilement tendance à croire en une belle formule ?

Depuis, j'ai trouvé un ouvrage (Le Lionnais, Les nombres remarquables, Hermann) indiquant les f_n premiers jusqu'à n=173.

5. La conjecture de Gilbreath

Lorsque qu'on écrit en ligne les nombres premiers et que l'on fait la différence terme à terme, en prenant la valeur absolue, on obtient toujours

	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59
	1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	6	
une ligne commençant par 1	**1**	0	2	2	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	0		
	1	2	0	0	0	0	0	2	2	2	0	0	0	2			
	1	2	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	2				

6. La conjecture de Goldbach (1730)

Tout entier pair ¿3 est la somme de deux nombres premiers. Tout entier impair ¿8 est la somme de 3 nombres premiers.

7. La conjecture de Poincaré (1890)

Il nous faut avant expliquer ce qu'est un homéomorphisme :

Un homéomorphisme est une déformation continue et réversible d'un objet : par exemple souffler dans un ballon, presser ce ballon, l'étirer... En revanche, le couper ne serait pas un homéomorphisme. Ainsi, puisqu'un ballon peut être transformé en cube, on dit qu'il existe un homéomorphisme entre la sphère et le cube, entre le cercle et le carré (essayez avec un élastique), entre votre lit et la sphère (à condition que votre lit soit d'un seul tenant c'est-à-dire, en langage mathématique, 'connexe')...

La conjecture de Poincaré affirme que “ dans un espace de dimension n, toute 'surface compacte orientable et simplement connexe' est homéomorphe à la sphère S_n ”

Sans trop rentrer dans les détails, une 'surface compacte orientable et simplement connexe' serait une surface sans trop de petits trous, pas trop tordue, et d'un seul tenant.

Il est acceptable de dire que ce résultat est évident si $n = 0$ou $n = 1$ (l'espace est alors réduit à un point ou à une droite). Si $n = 2$, vous voyez vous-même qu'un élastique qui aurait par exemple la forme d'un polygone peut être déformé (par un 'homéomorphisme') en cercle (= la sphère de dimension 2 : S_2). Ce n'est qu'en 1961 que le problème fut résolu par Smale pour $n > 6$, puis pour $n = 6$ par Stallings, ensuite pour $n = 5$ par Zeeman. En utilisant une méthode différente, Freedman montra que la conjecture était aussi vérifiée pour $n = 4$ mais le problème $n = 3$ reste d'une complexité telle que tous les progrès de ces dernières années en topologie n'en sont toujours pas venus à bout.

8. La conjecture de Riemann (1859)

De même que $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$ se rapproche de la valeur $\frac{\pi^2}{6}$ quand on augmente indéfiniment le nombre de termes, $\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\ldots$ (avec $s > 1$) tend vers une valeur que l'on note $\zeta(s)$ (prononcer : “ zêta de s "). On peut même étendre (par ce qui est appelé un 'prolongement analytique') cette fonction au plan complexe. Plus précisément pour on obtient ce qui est appelé la fonction ζ de Riemann. Riemann a conjecturé que tous les s tels que $\zeta(s) = 0$ ont une partie réelle égale à .

A l'heure actuelle, c'est l'une des plus importantes conjectures non résolues. En effet, de par son lien avec les nombres premiers (à travers la formule dite 'identité d'Euler' :

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - p_i^{-z})^{-1}$$

si Re(z)¿1), c'est un bon exemple d'un mélange d'analyse et de théorie des nombres, qu'on appelle donc théorie analytique des nombres. Elle intéresse entre autres les cryptographes en vue, par exemple, d'une application sur les codes secrets et sur les cartes à puce. C'est dans ce domaine des mathématiques que des militaires américains tentèrent d'interdire la publication de découvertes pour intérêt national.

Il existe de nombreuses autres conjectures célèbres comme celle de Carmichaël, Hadwiger, Heawood qui concernent respectivement la théorie des nombres, la théorie des graphes et le 'coloriage' (voir p.15)...

CHAPITRE 9

Les trois derniers points

Ce seront bien sûr des points de suspensions. Car, s'il est vrai que l'histoire des mathématiques n'est ni cyclique, ni même linéaire, il est fort peut probable qu'elle s'arrête un jour...

CHAPITRE 10

Bibliographie

J'ai privilégié dans cette liste (bien évidemment non exhaustive, même en ce qui concerne mes sources d'information) les livres appartenant à l'une des classes suivantes :

- les 'bibles' comme l'algorithmique selon Knuth
- les ouvrages de référence comme le *Dictionnaire des Mathématiques* d'A.Bouvier et M.George ou l'*Histoire des mathématiques* de Dahan et Pfeiffer
- les ouvrages passionnants comme *Le matin des mathématiciens* ou innovants comme *Échecs et maths*.

Mais surtout, tous ces ouvrages donnent eux-mêmes accès à des bibliographies imposantes, ce qui permet un effet boule de neige (plus de mille titres au total !) qui aura de quoi rassasier les plus curieux.

Les ouvrages disponibles à la Bibliothèque Universitaire d'Évreux sont signalés par un E, ceux de la BU de Rouen par un R et ceux de la Médiathèque d'Évreux par un M.

Le remarquable [19] est (déjà !) épuisé et ne sera sans doute pas réédité sous cette forme.

E[1] Baruk S. Dictionnaire de mathématiques élémentaires. Seuil, 1992 [2] Baruk S. Échecs et maths. Points Sciences, 1991 E[3] Bouvier A. & George M. Dictionnaire des Mathématiques. P.U.F., 4^e édition, 1993 R [4] Brassard G. Cryptologie contemporaine. Masson, 1992 [5] Chabert JL. Histoire d'algorithmes : du caillou à la puce. Belin, 1994 [6] Chambadal L. Dictionnaire de Mathématique. Hachette, 1981 E[7] Dahan-Dalmedico A. & Peiffer J. Une histoire des mathématiques : Routes et dédales. Points Sciences, 1986 R[8] Davis PJ. & Hersh R. L'Empire mathématique. Gauthier-Villars, 1988 M[9] Détraz J. Kovalevskaïa, l'aventure d'une mathématicienne. Belin, 1993 E[10] Ifrah G. Histoire universelle des chiffres. Robert Laffont, 1994 M[11] Hergé. Tintin au Congo. Casterman, 1939 E[12] Knuth DA. The Art of computer programming. Addisson-Wesley, 1981 M[13] Largeault J. L'intuitionisme. Que sais-je ? n 2684, PUF, 1992 [14] Mattei JF. Pythagore et pythagoriciens. Que sais-je ? n 2732, PUF, 1993 [15] Monnoyeur F. Infini des philosophes, infini des mathématiciens. Belin, 1993 E[16] Naudin P. & Quitté C. Algorithme algébrique. Masson, 1992 M[17] Noël E. Le matin des mathématiciens. Belin, 1990 [18] Poincaré H. La science et l'hypothèse. Champs Flammarion, 1989 [19] Pour la science, Dossier n 2 : Les mathématiciens. 1994 [20] Stewart I. Les mathématiques. Pour la Science/Belin, 1991

L'auteur de ce dossier estime à leur juste valeur les deux formidables ouvrages que sont l'*Encyclopedia Universalis* et le *Grand Larousse Universel* que tout un chacun se devrait d'avoir s'ils n'étaient pas si onéreux ; on pourra toutefois se contenter du *Petit Larousse Illustré* pour ce qui concerne les citations en langues étrangères.

Signalons dans un autre genre les revues *Pour la science*, *La Recherche*, *Science et Vie* et *Science et vie micro* qui produisent souvent des articles ayant trait aux mathématiques.

Parmi des revues plus spécialisées, citons *Pascalissime* (pour l'informatique et la programmation en langage Pascal) mais surtout, en ce qui concerne les mathématiques : *Tangente* (niveau lycée et plus) et *Quadrature* (niveau université et plus).

Pour des réflexions d'ordre pédagogique, épistémologique, historique (...) il y a *Plot*, les brochures de l'*APMEP* (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) et les nombreuses issues des différentes IREM régionales (Institut de Recherche dans l'Enseignement des Mathématiques).

Je ne parlerais pas ici des issues des grandes écoles ou des grands instituts ou académies qui sont chères et difficiles d'accès.

1. Quelques adresses

Pour la Science, 8 rue Férou 75278 Paris Cedex 06
FFJM, 1 av. Foch, 94700 Maisons Alfort
Tangente, Éditions Archimède, 5 rue Jean Grandel 95100 Argenteuil
Quadrature, Éditions du choix BP 129 Argenteuil Cedex 95103
Plot, APMEP Orléans-Tours BP 6759, 45067 Orléans Cedex 2
APMEP 26, rue Duméril 75013 Paris
Éditions Jacques Gabay , 151 bis, rue Saint-Jacques 75005 Paris
Librairie Albert Blanchard, 9 rue de Médicis 75 006 Paris
Pascalissime, 26 Rue Lamartine 75009 Paris
Addison-Wesley, 41 rue Turgot 75003 Paris

2. Crédit photographique

Grâce à la fratrie Tane (de charmants garçons), les portraits ont été pris sur [6]. Les autres illustrations sont de Cyril (un charmant garçon, n tél : 32 39 30 39).

CHAPITRE 11

Bilan et réflexions personnelles

Comme le lecteur aura pu s'en douter, l'auteur de ces lignes était d'avance un aficionado du sujet et la rédaction de ce dossier ne fut donc pas pour lui l'occasion d'une révélation ou d'une quelconque conversion. Toutefois, cela me permit de mieux réorganiser l'ensemble des connaissances mathématiques : en effet, je ne pouvais tenter de vulgariser sans avoir moi-même une vision claire et simple de ce dont j'allais parler. La rédaction de ce dossier me permit aussi de mieux orthographier certains noms de mathématiciens arabes, allemand ou japonais, de mieux utiliser mon traitement de texte et d'entrer dans le monde voluptueux de la mise en page...

A l'origine, je pensais pouvoir contacter des mathématiciens professionnels et voir ce que j'aurais pu en tirer, mais cela ne s'est pas fait. De même, j'aurais aimé pouvoir converser, via Internet, avec des passionnés de mathématiques, des chercheurs ou autres, mais, heureusement pour la personne qui aurait eu à payer la facture, cela ne s'est pas fait non plus. En outre, je pense que toute université qui se veut moderne devrait proposer à ses étudiants un accès gratuit (éventuellement limité en temps) à chacun de ses étudiants, cela serait plus utile que les bases de données Pascal, par exemple. En effet, ces dernières font plus rêver qu'autre chose : c'est comme regarder un programme de cinéma et ne jamais y aller (parce que le prix du billet est trop cher ou parce que la queue est trop longue). Je reconnais toutefois qu'il est important que chacun ait le droit et la possibilité de rêver...

En revanche, toutes les revues mathématiques mentionnées à la page précédentes m'ont répondu. J'ai ainsi découvert le Plot et l'APMEP que je ne connaissais que de réputations. Après une commande, Quadrature m'a même fait parvenir deux numéros gratuitement. Il ne faut tout de même pas se réjouir si facilement du succès que j'ai rencontré ici : toutes ces revues (ou association) avaient également un intérêt commercial à me répondre. Il demeure que la qualité des trois revues Tangente, Quadrature et Plot ne m'a pas déçu.

En tant que personne ayant à traiter quotidiennement (mais scolairement) avec les mathématiques, il m'est clair que la méconnaissance de l'histoire des sciences et, en ce qui nous concerne ici, de l'histoire des maths ne peuvent que défavoriser la formation d'un esprit scientifique. Un droit de cité à l'épistémologie et à l'histoire des mathématiques en classe serait donc le bienvenu. Celui-ci leur est bel et bien refusé : cela se remarque également dans les bibliothèques universitaires où la proportion des ouvrages historiques, épistémologiques est fort étroite devant celle des livres de cours, de qualité par ailleurs fort variée.

Pour ce qui des autres bibliothèques, municipales ou celles de l'enseignement secondaire, le désastre est encore plus flagrant. A titre d'illustration, l'ensemble des bibliothèques ébroïciennes (médiathèque et annexes) ne possèdent que quelques livres de mathématiques (en fait il s'agit de 3 dictionnaires de maths dont [3], de 3 excellents ouvrages historiques : [7], [9] et [16] ainsi que de livres de divertissements mathématisants pour bambins).

Passons maintenant aux librairies. Les quelques librairies possédant des ouvrages mathématiques, ou même plus généralement de sciences, n'ont en général que des ouvrages de bachotages. Dans le meilleur des cas, elles complètent leur rayon 'science' par des livres d'astronomie avec, bien sûr, les best-sellers

- d'Hubert Reeves, un barbu un peu chauve fort sympathique et suffisamment cultivé pour passer à la télé (Eh, eh !)

- ou de Stephen W.Hawking, atteint d'une grave maladie neuronale, il est paralysé ce qui ne l'a pas empêché d'atteindre les plus hautes sphères de l'astrophysique. Bien qu'il flirte un peu trop avec Dieu, comme Einstein, il produit tout de même des ouvrages cohérents et intéressants. Il serait vraiment gore de le confondre avec Stefen King, cet autre américain qui gagne ses pépettes via les étals des libraires.

Dans les deux cas, il s'agit tout de même des best-sellers de qualité mais il arrive également que les rayons sciences soient complétés avec des bouquins du genre 'tester votre QI' ou des livres d'astrologie et là, j'hésite entre l'ignorance irrépréhensible, le sourire ironique, le ricanement irréfragable, le rire sarcastique et l'irrésistible ire devant tant d'irrationnel. La science a encore des progrès à faire dans l'esprit de nos contemporains." Le XXI^e siècle sera *spirituel* ou ne sera pas... "

Quant aux maisons d'éditions, quand elles osent publier des ouvrages scientifiques, l'obstacle majeur reste le prix. La collection 'Logique mathématique et informatique' ou 'Axiome' de chez Masson est aussi chère qu'excellente, or les ouvrages de ces 2 collections (ex : [4] et [16]) sont d'une qualité exceptionnelle. La collection Points Sciences au Seuil reste quant à elle très 'accessible' avec des prix inférieurs à 50F (ex : [2] et [7]).

Il est dommage que des prix élevés soient ainsi un frein à la culture, à la connaissance (manifestation d'un idéalisme gauchiste ?), et cela ne peut que justifier un meilleur remplissage des bibliothèques dans le domaine scientifique.

Il faut également citer la Librairie Blanchard et les Éditions Jacques Gabay (que je remercie pour leur courrier, adresse page précédente) pour le travail fantastique qu'ils font en (ré)éditant les manuscrits des plus grands mathématiciens.

Pour passer à d'autres médias, que dire de la télévision ? Les mathématiques y sont inexistantes. Une émission sur Fermat était prévue le 03/05/1995 mais elle fut annulée pour cause de débat présidentiel Jospin/Chirac, depuis je n'ai plus entendu parler de cette émission mais beaucoup (trop ?) entendu parler des (les ?) 2 autres. Je signalerai toutefois l'existence de l'émission Archimède, le mardi soir à 20 heures, sur la chaîne la plus regardée des français.

Pour finir, en radio, il n'y a guère que la Maison Radio France pour s'intéresser aux sciences. C'est ainsi sur France Culture (excellente radio sans tubes ni pubs) que j'ai suivi une émission sur Leibniz et une autre sur la prévision en mathématique. Il y a aussi une série sur les impossibles en sciences (certains mercredis à 9h). C'est d'ailleurs à partir d'émissions de France Culture que [17] a été écrit.

CHAPITRE 12

Schluklappe : Plaisir des mathématiques...

La beauté et les mathématiques ou De la lubricité de l'esprit du mathématicien.