Faculté des Sciences de Monastir **Département de Mathématiques**

Examen
Arbres aléatoires et Processus de Branchement I

Section : Mastère — *05 Janvier 2011*
Nombre de pages : 3 — *Durée 3h*

Sans document

Problème 1:

Dans tout le problème, $X_1,\ X_2, \cdots$, est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de carré intégrable. On pose $M_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$M_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Dans la suite toutes les martingales sont relatives à la filtration naturelle du processus $(M_n)_n$.

(1) Montrer que $(M_n)_n$ est une martingale si et seulement si $\mathbf{E}[X_k] = 0$, pour tout entier $k \geq 1$.
Dans la suite on suppose toujours que, pour tout $k \geq 1$, $\mathbf{E}[X_k] = 0$.

(2) Pour tout $k \geq 1$, on pose $\sigma_k^2 = E[X_k^2]$ et $a_k = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2$ avec $a_0 = 0$.
Montrer que $M_n^2 - a_n$ est une martingale.

(3) On suppose, dans cette question, que $(a_n)_n$ converge vers une limite finie a.

(3-a) Montrer que la martingale $(M_n)_n$ converge presque sûrement et dans L^2 vers une limite M_∞.

(3-b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $M_n = \mathbf{E}[M_\infty / \mathcal{F}_n]$.

(3-c) Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbf{P}\Big(\sup_n |M_n| > \alpha\Big) \leq \frac{a}{\alpha^2}.$$

(4) A partir de maintenant, on suppose de plus que les variables aléatoires $X_1,\ X_2, \cdots$, ont même loi et prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1,\ 0,\ -1,\ -2, \cdots\}$ des entiers plus petits que 1. On suppose, aussi, que $\mathbf{P}(X_1 = 1) > 0$.
Soit $\lambda > 0$ et $\psi(\lambda) = \ln \Big[\mathbf{E}\Big(\exp(\lambda X_1)\Big)\Big]$.
Montrer que

$$W_n := \exp(\lambda M_n - n\psi(\lambda))$$

est une martingale. Cette martingale est-elle convergente presque sûrement? si oui sa limite est-elle dans L^1?

(5) Soit $b \in \mathbb{N}$ et $\tau_b = \inf\{n \geq 0 \;:\; M_n = b\}$. Montrer que $\tau_b < \infty$ presque sûrement (on pourra considérer la martingale $b - M_{n\wedge\tau_b}$).

(6) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\psi(\lambda)\tau_b\Big)\Big] = \exp(-\lambda b).$$

(7) En déduire, dans le cas particulier où $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$, la valeur de $\mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\beta\tau_b\Big)\Big]$ pour tout $\beta > 0$.

Problème 2:

Soit X une variable aléatoire entière intégrable de moyenne $m > 1$ telle que $\mathbf{P}(X = 0) > 0$. On considère $(Z_n)_{n\geq 0}$ un processus de branchement de loi de reproduction la loi de X et d'état initial $Z_0 = 1$. Soit $k \neq 0$ un entier naturel fixé. Nous allons montrer qu'avec une probabilité égale à 1, la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend la valeur k qu'un nombre fini de fois.
Pour ceci, nous allons étudier en réalité un deuxième processus de branchement $(\tilde{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'état initial $\tilde{Z}_0 = k$ et de loi de reproduction la loi de X.
On définit la suite de nombres positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$u_n = \mathbf{P}\Big(\tilde{Z}_n = k \text{ et } \tilde{Z}_i \neq k \text{ pour tout } 0 < i < n\Big)$$

C'est-à-dire que u_n est la probabilité pour que la suite $(\tilde{Z}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ prenne la valeur k pour la première fois au rang n (génération 0 exclue). On pose

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

(1) Que représente u?, en déduire que $u \leq 1$.

(2) Montrer que la probabilité pour que la suite $(\tilde{Z}_n)_n$ ne prenne pas la valeur k est non nulle. En déduire que $u < 1$

(3) Soit U la série génératrice de la suite $(u_n)_n$:

$$U(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n s^n.$$

On définit de la même manière les nombres $u_n^{(r)}$ $(n,\, r \in \mathbb{N}^*)$ comme la probabilité pour que la suite $(\tilde{Z}_n)_n$ prenne la valeur k pour la r^{ieme} fois au rang n.
Montrer que, pour tout entier r strictement positif, la série génératrice de la suite $(u_n^{(r)})_n$ est la fonction U^r.

(4) Montrer que la probabilité pour que la suite $(\tilde{Z}_n)_n$ prenne la valeur k une infinité de fois est nulle.

(5) En déduire que la probabilité pour que la suite $(Z_n)_n$ prenne la valeur k une infinité de fois est nulle.

(6) Conclure que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_n \mathbf{P}\Big(Z_n = k\Big) = 0.$$

Problème 3:

A l'instant 0, une urne contient une boule blanche et une boule rouge. A chaque instant n, on tire une boule, si la boule tirée est blanche on la remet dans l'urne et on ajoute une blanche et trois rouges, si la boule tirée est rouge on la remet dans l'urne en ajoutant aussi deux rouges et deux blanches. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note par B_n (resp. R_n) le nombre de boules blanches (resp. rouges) dans l'urne après le n^{ieme} tirage. On a donc $R_0 = B_0 = 1$ et $R_n + B_n = 2 + 4n$. Pour tout $n \geq 1$ on considère $\mathcal{F}_n = \sigma(B_k,\, k \leq n)$ et $Y_n = \begin{pmatrix} B_n \\ R_n \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer la matrice d'addition A de cette urne.

(2) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\mathbf{E}\Big(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n\Big) = \Big(I + \frac{A^{tr}}{2+4n}\Big)Y_n, \text{ où } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) En déduire une suite matricielle $(C_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$W_n := \frac{Y_n}{C_n}$$

soit une $(\mathcal{F}_n)_n$ martingale.

(4) Diagonaliser la matrice A.

(5) Déterminer une expression exacte de $\mathbf{E}[Y_n]$, pour tout $n \geq 1$.

(6) En déduire une expression de $\mathbf{E}[R_n]$, pour tout $n \geq 1$.