Faculté des Sciences de Monastir **Département de Mathématiques**

Examen
Probabilités

Section : Mastère 1 *3 Janvier 2011*
Nombre de pages : 2 *Durée 3h*

Aucun document n'est autorisé. Le barême est approximatif .

Exercice 1 (3 points)

Soient X une variable aléatoire integrable définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

1) Donner la définition de $\mathbf{E}(X/\mathcal{B})$.

2) Montrer que, si X est indépendante de $\mathcal{B}$, alors $\mathbf{E}(X/\mathcal{B}) = \mathbf{E}[X]$.

3) Montrer que, si X est $\mathcal{B}$-mesurable, alors $\mathbf{E}(X/\mathcal{B}) = X$, presque sûrement.

Exercice 2 (4 points) Soit $X = (X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)^{tr}$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance :

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Le vecteur X admet-il une densité ? justifier votre réponse.

(2) Déterminer la fonction caractéristique de X.

(3) Peut-on affirmer que X_3 et (X_1, X_2, X_4) sont indépendantes ?

(4) Quelle est la loi de (X_1, X_2)? Déterminer le réel a tel que X_2 et $X_1 - aX_2$ soient indépendantes.

(5) Déterminer $b \in \mathbb{R}$ tel que les quatres variables aléatoires réelles $X_1 - aX_2,\ X_2,\ X_3,\ X_4 - bX_2$ soient mutuellement indépendantes.

Exercice 3 (5 points)

Soient $(X_n,\ \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ une sous-martingale et T une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^*$ intégrable, telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

(1) Montrer que $X_T = X_1 + \sum_{n\geq 1}(X_{n+1} - X_n)\mathbb{1}_{\{T\geq n+1\}}$.

(2) Montrer que $\mathbf{E}\Big[\Big(X_{n+1} - X_n\Big)\mathbb{1}_{\{T\geq n+1\}}/\mathcal{F}_n\Big] \geq 0$.

(3) En déduire que $\mathbf{E}[X_T/X_1] \geq X_1$ puis que $\mathbf{E}[X_T] \geq \mathbf{E}[X_1]$.

(4) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi dans L^1. Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Montrer que $Y_n = S_n - n\mathbf{E}[X_1]$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle du processus $(X_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 4 (8 points)

Soit la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = e^{-y}\mathbb{1}_{\Delta}(x,y),\ \text{où } \Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 \leq x \leq y\}.$$

(1) Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Soit (X,Y) un couple de v.a.r de densité f. Déterminer les densités des lois marginales de X et Y . Montrer qu'une version régulière de la loi conditionnelle de Y sachant X est donnée par

$$N(x,dy) = e^{x-y}\mathbb{1}_{\{y\geq x\}}dy.$$

En déduire $\mathbf{E}[Y^2/X]$ et $\mathbf{E}[Y^2/2X]$.

(3) Déterminer une version régulière de la loi conditionnelle de X sachant Y. En déduire $\mathbf{E}[X^2/Y]$.

(4) Déterminer une version régulière de la loi conditionnelle de X sachant $Y-X$. En déduite $\mathbf{E}[X^2/X-Y]$.