

EXAMEN CONTROL

Arbres aléatoires et Processus de Branchement II

SECTION : Mastère ancien régime

07 mai 2011

Nombre de pages : 3

Durée 3h

Sans document

Problème 1:

On considère un arbre binaire de recherche T_n associé à une permutation \mathcal{S}_n de $\{1, 2, \dots, n\}$. On note par R_n la racine de T_n (qui n'est autre que le premier terme de la permutation \mathcal{S}_n). Initialement on considère T_{R_n-1} le sous-arbre gauche et T_{n-R_n} le sous-arbre droit de T_n (de tailles respectives $R_n - 1$ et $n - R_n$). On choisit un nombre aléatoire V_n selon la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n - 1\}$; si $V_n < R_n$ alors on considère que le sous arbre gauche, si $V_n \geq R_n$ on considère que le sous-arbre droit. Ainsi en première étape, sachant R_n , on choisit le sous-arbre gauche avec probabilité $\frac{R_n-1}{n-1}$ et le sous-arbre droit avec probabilité $\frac{n-R_n}{n-1}$. Ainsi de suite on continue de la même manière jusqu'à avoir un sous-arbre de taille 1. Si à une certaine étape on a choisi un sous-arbre T' de taille $|T'|$ et de valeur à la racine R' on choisit le sous-arbre gauche de T' avec probabilité $\frac{R'-1}{|T'|-1}$ et on choisit le sous-arbre droit avec probabilité $\frac{|T'|-R'}{|T'|-1}$.

On note par S_n la longueur du trajet d'extrémités R_n et la racine du dernier arbre choisi (arbre réduit à seul noeud). On note aussi par ϕ_n la fonction génératrice des moments de S_n définie par

$$\forall t \in]-1, 1[, \phi_n(t) = \mathbf{E} \left[\exp(S_n t) \right].$$

(1) Montrer que S_n vérifie la récurrence suivante

$$S_n \stackrel{ps}{=} 1 + \mathbb{I}_{\{V_n < R_n\}} S_{R_n-1} + \mathbb{I}_{\{V_n \geq R_n\}} \tilde{S}_{n-R_n}, \quad \forall n \geq 1,$$

où \tilde{S}_j est une copie indépendante de S_j (c'est à dire que S_j et \tilde{S}_j sont iid).
En plus \tilde{S}_j et S_k sont indépendants pour tous $j, k \in \mathbb{N}$.

(2) Vérifier que

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= e^t \left[\sum_{r=1}^n \sum_{v=1}^{r-1} \mathbf{E}[e^{S_{r-1}t}] \mathbf{P}[R_n = r] \mathbf{P}[V_n = v] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=1}^n \sum_{v=r}^{n-1} \mathbf{E}[e^{\tilde{S}_{n-r}t}] \mathbf{P}[R_n = r] \mathbf{P}[V_n = v] \right]. \end{aligned}$$

(3) En déduire que

$$n(n-1)\phi_n(t) = \frac{n+2e^t-2}{n}\phi_{n-1}(t).$$

(4) Sachant que $S_0 = 0$ (à expliquer pourquoi) montrer que

$$\phi_n(t) = \frac{\Gamma(n+2e^t-1)}{\Gamma(e^t)\Gamma(n+1)}.$$

Rappels: Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
La fonction Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t}t^{x-1}dt$.

(5) Montrer que

$$\frac{S_n - 2 \ln n}{\sqrt{2 \ln n}} \xrightarrow{(loi)} \mathcal{N}(0, 1).$$

(6) Dédurre que

$$\lim_n \frac{\mathbf{E}[S_n]}{2 \ln n} = 1$$

$$\lim_n \frac{\mathbf{Var}[S_n]}{2 \ln n} = 1.$$

Problème 2:

On considère le même ABR T_n que dans le problème 1, R_n représente toujours sa racine. On considère $Z_n = \min\{R_n - 1, n - R_n\}$. Si $Z_n = R_n - 1$ on considère que le sous-arbre gauche T_{R_n-1} qui est un ABR associé à une permutation de $\{1, 2, \dots, R_n - 1\}$. Si $Z_n = n - R_n$ on ne considère que le sous-arbre droit T_{n-R_n} qui est un ABR associé à une permutation de $\{R_n + 1, \dots, n\}$. On continue ce procédé de la même façon jusqu'à avoir un sous-arbre vide. On appelle D_n la longueur du trajet d'extrémités la racine R_n de T_n et la racine du dernier sous-arbres non vide choisit.

(1) Montrer que

$$D_n \stackrel{ps}{=} 1 + D_{Z_n}, \forall n \geq 1.$$

Avec $D_0 = 0$

(2) On note par F_n la fonction de répartition de Z_n . Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor - 1\}$ on a

$$F_n(k) = \frac{2}{n}(k+1).$$

(3) En déduire la loi de Z_n .

(4) On pose $g_1 = \frac{1}{1+\ln 2}$ et $g_2 = \frac{1}{(1+\ln 2)^3}$. Montrer que

$$\lim_n \frac{\mathbf{E}[D_n]}{g_1 \ln n} = 1$$

$$\lim_n \frac{\mathbf{Var}[D_n]}{g_2 \ln n} = 1$$

(5) On pose

$$D_n^* = \frac{D_n - g_1 \ln n}{\sqrt{g_2 \ln n}}.$$

Montrer que

$$D_n^* \stackrel{ps}{=} D_{Z_n}^* \frac{\sqrt{\ln(Z_n)}}{\sqrt{\ln n}} + A_n(Z_n)$$

où $A_n(Z_n)$ est une variable aléatoire que l'on déterminera.

(6) Rappeler les étapes pour pouvoir utiliser la méthode du point fixe en loi pour étudier la convergence en loi de D_n^* .

(7) Quelle est la loi limite de D_n^* ?