

Corrigé de Examen
Processus de branchement

28 Janvier 2012

Problème 1:

- (1) Montrer que $W_n(z)$ est bien un polynôme.
- (R1) *Il suffit de remarquer que le degré de $W_n(z)$ est inférieure à n puisque pour tout $k \geq n$ on a $X_{n,k} = 0$*

(2) Calculer $\mathbf{E}[W_n(z)]$.

- (R2) *On utilise le résultat du cours qui donne $\mathbf{E}[X_{n,k}]$ et aboutir à*

$$\mathbf{E}(W_n(z)) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{j+2z}{j+1}.$$

- (3) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ le processus $(M_n(z), \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ est une martingale,
où , pour tout entier n

$$\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \dots, T_n) \text{ et } M_n(z) = \frac{W_n(z)}{\mathbf{E}[W_n(z)]}.$$

- (R3) *On a la relation suivante*

$$X_{n+1,k} = X_{n,k} - \mathbb{1}_{\{k_{n+1}=k\}} + 2\mathbb{1}_{\{k_{n+1}=k-1\}}.$$

Cette relation va permettre d'avoir une relation de récurrence sur le polynôme de niveau:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(W_{n+1}(z)/T_n\right) &= \sum_{k \geq 0} z^k \left[X_{k,n} + 2\mathbf{P}(U_n = k-1/T_n) - \mathbf{P}(U_n = k/T_n) \right] \\ &= \frac{n+2z}{n+1} W_n(z). \end{aligned}$$

- (4) On définit E_n la longueur de cheminement externe associée à T_n qui représente la somme des profondeurs de toutes les feuilles de T_n : c'est à dire, si pour tout v feuille de T_n , d_v représente sa profondeur, on a

$$E_n = \sum_{v \text{ noeud externe de } T_n} d_v$$

(a) Vérifier que $E_n = \frac{d}{dz}W_n(z)|_{z=1}$.

Réponse: *évident*

(b) Vérifier que pour tout z , $(M'_n(z), \mathcal{F}_n)_n$ est aussi une martingale, $M'_n(z)$ est la dérivée par rapport à z de $M_n(z)$.

Réponse: *évident*

(c) En déduire $\mathbf{E}[E_n]$.

Réponse: *évident*

(d) Montrer que le processus

$$\frac{1}{n+1} \left(E_n - \mathbf{E}[E_n] \right)$$

est une $(\mathcal{F}_n)_n$ martingale bornée dans L^2

Réponse: *Comme la dérivée d'une martingale est une martingale, il suffit de calculer $M'_n(z)$ pour obtenir*

$$M'_n(1) = \frac{W'_n(1)}{n+1} - \frac{\mathbf{E}(W'_n(1))}{n+1} = \frac{W'_n(1)}{n+1} - 2(H_{n+1} - 1).$$

Pour montrer que cette martingale est bornée dans L^2 , on développe $M'_n(1)$ en fonction de $M'_{n-1}(1)$ et on applique l'espérance.

(5) Montrer par récurrence que $E_n = I_n + 2n$, où I_n est la longueur de cheminement interne associée à T_n : c'est la somme des profondeurs de tous les noeuds internes de T_n .

(R5) *Par récurrence sur n*

(6) En déduire que le processus $\left(\frac{I_n - 2(n+1)h_n + 4n}{n+1}, \mathcal{F}_n \right)_n$ est une martingale bornée dans L^2 , où pour tout $n \geq 1$, $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(R6) *Evident d'après les questions précédentes*

Problème 2:

Tout est dans l'article de "David A. Freedman" intitulé "Bernard Friedman's Urn" en remarquant que

$$W_n + B_n = a + n\sigma$$