

CORRECTION DEVOIR SURVEILLÉ
Probabilités

SECTION : Mastère 1

mai 2011

Exercice 1 (10 points):

Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ une martingale dans L^2 .

- (1) Soit $\lambda > 0$, on pose $T = \min\{k \geq 0 ; |X_k| \geq \lambda\}$ (par convention $\min \emptyset = +\infty$). Vérifier que $T \wedge n$ est un $(\mathcal{F}_j, j \geq 1)$ temps d'arrêt.

On doit montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\{T \wedge n = k\} \in \mathcal{F}_k$.

- Si $n = k$, alors

$$\{T \wedge n = k\} = \{T \geq k\} = \bigcap_{i=0}^{i=k} \{|X_i| < \lambda\} \in \mathcal{F}_k.$$

- Si $n < k$, alors

$$\{T \wedge n = k\} = \emptyset \in \mathcal{F}_k.$$

- Si $n > k$, alors

$$\{T \wedge n = k\} = \{T = k\} = \bigcap_{i=0}^{i=k-1} \{|X_i| < \lambda\} \cap \{|X_k| \geq \lambda\} \in \mathcal{F}_k.$$

- (2) On pose $X_n^* = \max_{0 \leq k \leq n} |X_k|$. En appliquant le premier théorème d'arrêt, montrer que

$$\lambda \mathbf{P}(X_n^* \geq \lambda) \leq \mathbf{E}\left(|X_n| \mathbb{I}_{\{|X_n^*| \geq \lambda\}}\right).$$

On viens de vérifier que, pour tout entier n , $T \wedge n$ est un $(\mathcal{F}_j, j \geq 0)$ temps d'arrêt. On va appliquer le premier théorème d'arrêt à la sous-martingale $|X_n|$ aux temps d'arrêts $T \wedge n$ et n qui sont bornés par n . On a

$$\mathbf{E}\left(|X_n| / \mathcal{F}_{T \wedge n}\right) \geq |X_{T \wedge n}|.$$

On vérifie que l'événement $\{X_n^* \geq \lambda\}$ est dans la tribu $\mathcal{F}_{T \wedge n}$. Par suite d'après la propriété (ii) de l'espérance conditionnelle on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(|X_n| \mathbb{I}_{\{X_n^* \geq \lambda\}}\right) &\geq \mathbf{E}\left(|X_{T \wedge n}| \mathbb{I}_{\{X_n^* \geq \lambda\}}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(|X_T| \mathbb{I}_{\{X_n^* \geq \lambda\}}\right) \text{ en effet } \{T \leq n\} = \{X_n^* \geq \lambda\} \\ &\geq \lambda \mathbf{E}\left[\mathbb{I}_{\{X_n^* \geq \lambda\}}\right] \text{ car } |X_T| \geq \lambda. \end{aligned}$$

(3) Soit $b > 0$, montrer que

$$\mathbf{E}\left((X_n^* \wedge b)^2\right) \leq 2\mathbf{E}\left((X_n^* \wedge b)|X_n|\right).$$

ind. Remarquer, que pour tout $x \geq 0$, on a $x^2 = 2 \int_0^x t dt$.

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left((X_n^* \wedge b)^2\right) &= 2\mathbf{E}\left(\int_0^{X_n^* \wedge b} t dt\right) = 2\mathbf{E}\left(\int_0^b t \mathbb{I}_{\{X_n^* \geq t\}} dt\right) \\ &= 2 \int_0^b t \mathbf{P}\left(X_n^* \geq t\right) dt \leq 2 \int_0^b \mathbf{E}\left(|X_n| \mathbb{I}_{\{X_n^* \geq t\}}\right) dt \\ &= 2\mathbf{E}\left(\int_0^{b \wedge X_n^*} |X_n| dt\right) = 2\mathbf{E}\left((X_n^* \wedge b)|X_n|\right). \end{aligned}$$

(4) A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\mathbf{E}[(X_n^*)^2] < \infty$$

et que

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0 \leq k \leq n} X_k^2\right) \leq 4\mathbf{E}\left(X_n^2\right).$$

En faisant tendre b vers $+\infty$ et en utilisant le théorème de convergence monotone et la question précédente, on obtient:

$$\mathbf{E}\left((X_n^*)^2\right) \leq 2\mathbf{E}\left(|X_n|X_n^*\right).$$

En utilisant le fait que $X_n^* \leq \sum_{k=0}^n |X_k|$ on conclut que X_n^* est dans L^2 . D'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathbf{E}\left((X_n^*)^2\right) \leq 2\mathbf{E}\left(|X_n|X_n^*\right) \leq 2\left(\mathbf{E}(X_n^2)\right)^{1/2} \left(\mathbf{E}((X_n^*)^2)\right)^{1/2}.$$

Ainsi on conclut que

$$\left(\mathbf{E}((X_n^*)^2)\right)^{1/2} \leq 2\left(\mathbf{E}(X_n^2)\right)^{1/2}.$$

(5) En déduire que si $X_0 = 0$ et si A_n représente le processus croissant prévisible de la décomposition de Doob de la sous-martingale X_n^2 alors

$$\mathbf{E}\left(\sup_n X_n^2\right) \leq 4\mathbf{E}\left(A_\infty\right)$$

où $A_\infty = \lim_n A_n$.

X_n^2 est une sous-martingale, donc d'après la décomposition de Doob, il existe un unique couple (A_n, M_n) tel que A_n est processus croissant prévisible vérifiant $A_0 = 0$, M_n est une martingale et

$$X_n^2 = A_n + M_n.$$

Ainsi $E[X_n^2] = \mathbf{E}[A_n] + \mathbf{E}[M_n] = \mathbf{E}[A_n] + \mathbf{E}[M_0]$. Donc si $X_0 = 0$ alors obligatoirement $M_0 = 0$ et par suite

$$E[X_n^2] = \mathbf{E}[A_n], \text{ donc } \mathbf{E}\left(\sup_n X_n^2\right) \leq 4\mathbf{E}[A_n].$$

On peut conclure, en utilisant le théorème de convergence monotone.

Exercice 2 (10 points):

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m < 0$. On pose

$$S_0 = 0, \text{ pour } n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n) \text{ et } W = \sup_{n \geq 0} S_n.$$

- (1) Montrer que $\mathbf{P}(W < \infty) = 1$.

D'après la loi forte des grands nombres on a S_n/n converge presque sûrement vers $m < 0$. Ainsi, presque sûrement, pour tout ω dans Ω il existe un rang $n_0(\omega)$ tel que pour tout $n \geq n_0(\omega)$ on a $S_n(\omega) \leq 2$ ceci prouve que $W < \infty$ presque sûrement.

- (2) Calculer, pour tout réel λ , $\mathbf{E}(e^{\lambda S_{n+1}} / \mathcal{F}_n)$.

On rappelle que si X suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}(e^{\theta X}) = \exp\left(\frac{\theta^2 \sigma^2}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{\lambda S_{n+1}} / \mathcal{F}_n) &= e^{\lambda S_n} \mathbf{E}(e^{\lambda X_{n+1}} / \mathcal{F}_n) \text{ (mesurabilité)} \\ &= e^{\lambda S_n} \mathbf{E}(e^{\lambda X_{n+1}}) \text{ (indépendance)} \\ &= e^{\lambda S_n} \mathbf{E}(e^{\lambda(X_{n+1}-m)}) e^{\lambda m} \\ &= e^{\lambda S_n} \exp\left(\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}\right) e^{\lambda m} \text{ (d'après le rappel)} \end{aligned}$$

- (3) Montrer qu'il existe un réel λ_0 tel que $(e^{\lambda_0 S_n}, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ est une martingale.

On a une martingale si et seulement si

$$\lambda m + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} = 0.$$

La solution non nulle (pour éviter le cas trivial) de la dernière équation est $\lambda_0 = \frac{-2m}{\sigma^2}$.

(4) Montrer que pour tout $a > 1$ on a,

$$\mathbf{P}\left(e^{\lambda_0 W} > a\right) \leq \frac{1}{a} \text{ et que pour tout réel } t, \mathbf{P}\left(W > t\right) \leq e^{-\lambda_0 t}.$$

L'inégalité maximale de Doob appliquée à la martingale positive $\left(e^{\lambda_0 S_n}, \mathcal{F}_n\right)_{n \geq 0}$ montre que

$$a\mathbf{P}\left(e^{\lambda_0 W} > a\right) = a\mathbf{P}\left(\max_n e^{\lambda_0 S_n} > a\right) \leq \sup_n \mathbf{E}\left(e^{\lambda_0 S_n}\right) = \mathbf{E}\left(e^{\lambda_0 S_1}\right) = \exp\left(\lambda_0^2 \frac{\sigma^2}{2} + \lambda_0 m\right) = 1$$

Pour obtenir la deuxième inégalité, il suffit de remarquer que

$$\mathbf{P}\left(W > t\right) = \mathbf{P}\left(e^{\lambda_0 W} > e^{\lambda_0 t}\right).$$