Faculté des Sciences de Monastir **Département de Mathématiques**

Examen
Arbres aléatoires et Processus de Branchement II

Section : Mastère ancien régime *12 janvier 2012*
Nombre de pages : 3 *Durée 3h*

Sans document

Exercice [Théorème de Lyapunov]

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et dans L^3. Pour tout $n \geq 1$ on pose $\mu_n = \mathbf{E}[X_n]$, $\mathbf{V}[X_n] = \sigma_n^2$ et $\beta_n = \mathbf{E}[|X_n - \mu_n|^3]$. on pose aussi

$$A_n = \Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\Big)^{1/3}, \ B_n = \Big(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\Big)^{1/2}.$$

Montrer que si $\lim_n A_n/B_n = 0$ alors la suite $Y_n = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)/B_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.

Problème :

On dispose d'une source qui émet une suite de valeurs $(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots)$ selon une certaine loi de telle façon que

$$\forall\ i \neq j,\ \mathbf{P}(x_i = x_j) = 0.$$

(A) Soient $n \in \mathbb{N}$ et T_n l'ABR associé à la suite $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

(A-1) donner la définition de construction de T_n

(A-2) Montrer que pour tout $k \geq 1$, U_k: le rang de x_k (classé dans le sens croissant) parmi $x_1, \cdots, x_k$ suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \cdots, k\}$.

(B) Soit $n \geq 1$ fixé et T_n l'ABR associé à $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. On complète T_n par des feuilles de telle façon que chaque noeud interne ait exactement 2 descendants, on obtient ainsi un arbre binaire complet. On confond ensuite T_n et son arbre completer.

(B-1) Montrer que le nombre de feuilles dans T_n est égal à $n + 1$.

(B-2) On numérote les feuilles de T_n de gauche à droite de 1 à $n+1$. Montrer que la nouvelle clé x_{n+1} prendra la place de la feuille numéro k ($1 \leq k \leq n+1$) si et seulement si le rang de x_{n+1} parmi $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ est k.

(C) Pour tout entier k, on note par $X_{n,k}$ le nombre de feuilles au niveau k dans T_n.

(C-1) Que vaut $\sum_{k=1}^{+\infty} X_{n,k}$.

(C-2) Montrer que, pour tout k, $\mathbf{P}\Big(U_n = k/T_n\Big) = \frac{X_{n,k}}{n+1}$.

(C-3) En déduire que $\mathbf{P}\Big(U_n = k\Big) = \frac{\mathbf{E}[X_{n,k}]}{n+1}$.

(C-4) Montrer qu'on a la relation suivante

$$(n+1)\mathbf{E}[X_{n+1,k}] - n\mathbf{E}[X_{n,k}] = 2\mathbf{E}[X_{n,k-1}].$$

(C-5) Déduire la valeur de $\mathbf{E}[X_{n,k}]$.

(D) On appelle G_n la série génératrice de U_n; qui est définie par

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ G_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \mathbf{P}\Big(U_n = k\Big).$$

(D-1) Montrer que

$$G_n(z) = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}(2z+k-1).$$

(D-2) En déduire que

$$\mathbf{E}[U_n] = 2(H_{n+1} - 1),$$

où $H_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

(D-3) Montrer que $\dfrac{U_n}{\ln n}$ converge en probabilité vers 2.

(E) Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que pour tout n, Y_n suit la loi de Bernouilli de paramètre $\dfrac{2}{n+1}$.

(E-1) Montrer que U_n et $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$ ont la même loi.

(E-2) En utilisant le théorème de Lyapounov, montrer que $U_n^* := \dfrac{U_n - \mathbf{E}[U_n]}{\sqrt{\mathbf{V}[Un]}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.

(F) Pour tout k, on note par $M_{n,k}$ le nombre de noeuds internes au niveau k de T_n. Soit aussi S_n la profondeur d'un noeud interne choisi au hasard dans T_n.

(F-1) Montrer que

$$M_{n,k} = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{X_{n,j}}{2^{j-k}}.$$

(F-2) En déduire, d'après ce qui précède, la loi de S_n

(F-3) Déterminer la série génératrice de S_n

(F-4) Déterminer les moments d'ordre 1 et 2 de S_n

(F-5) Étudier le comportement asymptotique en loi de $S_n^* = \dfrac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbf{V}[S_n]}}$.