Faculté des Sciences de Monastir **Département de Mathématiques**

Examen de la session Principale

Epreuve de Processus de Branchement et Arbres Aléatoires II

Section : Mastère ancien régime *Mercredi , 13 avril 2011*

Nombre de pages :3 *Durée 3h*

Aucun document n'est autorisé.

Problème:

Soient $\mathcal{S}_n$ une permutation de $1,\ 2, \cdots, n$ et T_n l'arbre binaire de recherche associé. On note par R_n la valeur de la racine de T_n qui n'est autre que le permier terme de $\mathcal{S}_n$.

A) On note par Q_n la profondeur du noeud muni du clé n.

(1) Montrer que

$$Q_n = \Big(Q_{n-(R_n-1)} + 1\Big) 1\!\!1_{\{R_n \neq n\}}.$$

(2) Déduire que

(2-a) on a

$$\frac{\mathbf{E}[Q_n]}{\ln n} \longrightarrow_n 1$$

(2-b) et

$$\frac{\mathbf{Var}[Q_n]}{\ln n} \longrightarrow_n 1.$$

(3) Montrer que

$$\frac{Q_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1).$$

ind.: On pourra utiliser la méthode du point fixe en loi.

B) On note par $W_1(n)$ la somme de toutes les clés des noeuds se trouvant sur le parcours menant R_n à 1.

Exemple: Si $n = 5$ et $\mathcal{S}_5 = 3, 4, 2, 1, 5$, alors

$$W_1(5) = 3 + 2 + 1.$$

(1) Montrer que

$$W_1(n) = R_n + 1 + W_1(R_n).$$

(2) Soit ϕ_n la fonction caractéristique de $W_1(n)$:

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \phi_n(t) = \mathbf{E}\Big(e^{itW_1(n)}\Big).$$

(2-a) Vérifier que

$$\phi_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{kt}\phi_{k-1}(t).$$

(2-b) En déduire que

$$\phi_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k-1+e^{ikt}}{k}.$$

(2-c) En déduire aussi que

$$\mathbf{E}[W_1(n)] = n,\ \mathbf{Var}[W_1(n)] = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(3) Soit t un réel dans un voisinage de 0.

(3-a) Montrer que

$$log\Big(\phi_n(t)\Big) = O(nt^2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikt}-1}{k}.$$

(3-b) En déduire que

$$log\Big(\phi_n(\frac{t}{n})\Big) \longrightarrow_n \int_0^1 \frac{e^{itv}-1}{v} dv.$$

(3-c) Conclure à propos de la convergence en loi de $\frac{W_1(n)}{n}$ et cacatériser la loi limite.

C) On note par $W_n(n)$ la somme de toutes les clés des noeuds se trouvant sur le parcours joignant R_n et n.
Dans l'exemple précédent on a

$$W_n(n) = 3+4+5.$$

Pour étudier le comportement asymptotique de $W_n(n)$ on utilise une méthode qui s'appelle méthode de reflexion et qui consiste à faire une rotation de 180 de $T-n$ pour obtenir un nouveau arbre T_n'. Pour conserver la propriété d'arbre binaire de recherche pour T_n' on doit réinserrer les clés $1, 2, \cdots, n$.

Exemple: la reflexion de l'arbre T_5 est l'arbre T_5':

(1) Vérifier que un noeud de clé k dans T_n se tranforme en un noeud de clé $n+1-k$ dans T_n'.

(2) On note par $Y_1, \cdots, Y_{1+Q_n}$ les clés des noeuds se trouvant sur le parcours menant R_n à n où Q_n est la profodondeur du noeud muni de la clé n.
On a donc

$$W_n(n) = \sum_{j=1}^{1+Q_n} Y_j.$$

Vérifier que

$$W_n(n) \overset{loi}{=} \Big(1 + Q_n\Big)(n+1) - W_1(n).$$

(3) En déduire que

- $\frac{\mathbf{E}[W_n(n)]}{n \ln n} \longrightarrow_n 1.$
- $\frac{\mathbf{Var}[W_n(n)]}{n^2 \ln n} \longrightarrow_n 1.$

(4) On pose

$$W_n^* = \frac{W_n(n) - n \ln n}{n\sqrt{n}}.$$

Vérifier que

(4-a)

$$W_n^* \overset{loi}{=} \frac{nQ_n - n \ln n}{n\sqrt{n}} + \frac{Q_n}{n\sqrt{n}} + \frac{n+1}{n\sqrt{\ln n}} - \frac{W_1(n)}{n\sqrt{\ln n}},$$

(4-b)

$$\frac{W_1(n)}{n\sqrt{\ln n}} \xrightarrow{ps} 0,$$

(4-c)

$$\frac{Q_n}{n\sqrt{\ln n}} \xrightarrow{ps} 0.$$

(5) En déduire que

$$W_n^* \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1).$$