École supérieure des Sciences et de Technologie **Hammam Sousse**

Devoir surveillé
Probabilités

Section : Mastère 1 *mai 2011*
Nombre de pages : 2 *Durée 1h30*

Sans document . Barème approximatif .

Exercice 1 (10 points):

Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une martingale dans L^2.

(1) Soit $\lambda > 0$, on pose $T = \min\{k \geq 0 \;;\; |X_k| \geq \lambda\}$ (par convention $\min\emptyset = +\infty$). Vérifier que $T \wedge n$ est un $(\mathcal{F}_j,\, j \geq 1)$ temps d'arrêt.

(2) On pose $X_n^* = \max_{0\leq k\leq n} |X_k|$. En appliquant le premier théorème d'arrêt, montrer que

$$\lambda \mathbf{P}\Big(X_n^* \geq \lambda\Big) \leq \mathbf{E}\Big(|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n^*|\geq\lambda\}}\Big).$$

(3) Soit $b > 0$, montrer que

$$\mathbf{E}\Big((X_n^* \wedge b)^2\Big) \leq 2\mathbf{E}\Big((X_n^* \wedge b)|X_n|\Big).$$

ind. Remarquer, que pour tout $x \geq 0$, on a $x^2 = 2\int_0^x t dt$.

(4) A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\mathbf{E}[(X_n^*)^2] < \infty$$

et que

$$\mathbf{E}\Big(\sup_{0\leq k\leq n} X_k^2\Big) \leq 4\mathbf{E}\Big(X_n^2\Big).$$

(5) En déduire que si $X_0 = 0$ et si A_n représente le processus croissant prévisible de la décomposition de Doob de la sous-martingale X_n^2 alors

$$\mathbf{E}\Big(\sup_n X_n^2\Big) \leq 4\mathbf{E}\Big(A_\infty\Big)$$

où $A_\infty = \lim_n A_n$.

Exercice 2 (10 points):

Soit $(X_n,\ n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(m,\ \sigma^2)$ avec $m < 0$. On pose

$$S_0 = 0,\ \text{pour}\ n \geq 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ \mathcal{F}_n = \sigma(X_k,\ k \leq n)\ \text{et}\ W = \sup_{n\geq 0} S_n.$$

(1) Montrer que $\mathbf{P}\Big(W < \infty\Big) = 1$.

(2) Calculer, pour tout réel λ, $\mathbf{E}\Big(e^{\lambda S_{n+1}}/\mathcal{F}_n\Big)$.
On rappelle que si X suit la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}\Big(e^{\theta X}\Big) = \exp\Big(\frac{\theta^2\sigma^2}{2}\Big).$$

(3) Montrer qu'il existe un réel λ_0 tel que $\Big(e^{\lambda_0 S_n},\ \mathcal{F}_n\Big)_{n\geq 0}$ est une martingale.

(4) Montrer que pour tout $a > 1$ on a,

$$\mathbf{P}\Big(e^{\lambda_0 W} > a\Big) \leq \frac{1}{a}\ \text{et que pour tout réel}\ t,\ \mathbf{P}\Big(W > t\Big) \leq e^{-\lambda_0 t}.$$